Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A : Optimización
Profesores: Natalia Yanković - Guillermo Durán
Patricio Conca
Auxiliares: Alejandro Cataldo - Giovanni Medina
Francisco González - Sebastián Souyris

PAUTA EXAMEN OTOÑO 2003

Duración: 3 horas.

Problema sobre materia del curso

1. Indique por qué es necesario validar un modelo matemático. Explique como se realiza en la práctica la validación.

   Respuesta: Al construir un modelo matemático generalmente se deben hacer aproximaciones o simplificaciones: Ellas deben ser tales que no disminuyan sustancialmente la representatividad del modelo. La validación tiene por propósito verificar una razonable representatividad del modelo. La validación puede efectuarse con :

   - Uso de información histórica. Se alimenta el modelo con parámetros del pasado y se ve si éste reproduce o no el comportamiento histórico.
   - Experimentación. Se cambian artificialmente los parámetros del modelo y se analiza si la respuesta del modelo es concordante con los cambios anteriores.

2. Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.

   Respuesta: El óptimo del problema lineal debe cumplir las condiciones de Karuch-Kuhn-Tucker. Si un punto es interior, todas las restricciones son no activadas. Luego $\mu_i = 0$ para todo i.

   Se tiene que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$
$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \qquad \forall\, i.$$

   esto no se puede cumplir ya que existe al menos un $c_i > 0$, con lo cual se llega a una contradicción. Luego un punto interior no puede cumplir Karush-Kuhn-Tucker.

3. Explique como puede resolverse un sistema de ecuaciones lineales aplicando el algoritmo simplex.

   Respuesta: Se deben seguir los siguientes pasos:

   - Definir una variable artificial por ecuación.
   - Cada variable original reemplazarla por la resta de 2 variables no negativas.
   - Definir la función auxiliar.
   - Se resuelve una FASE 1.

4. Discuta si tiene o no sentido plantear el concepto de precio sombra en un problema de programación lineal entera.

   Respuesta: Matemáticamente los precios sombra se definen como:

$$lim \frac{\triangle z}{\triangle b_i}$$

   con $\triangle b_i \neq 0$.

   Si la solución óptima no tiene restricciones activas entonces el precio sombra es siempre nulo. Si tiene alguna restricción activa entonces el precio sombra tendrá valores distintos si $\triangle b_i$ (∂b_i) es positivo o negativo, siendo siempre uno de ellos nulo. Dado esto, el concepto no tiene sentido en programación lineal entera.

5. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).

   Respuesta: Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.

6. Suponga que en el problema de flujo máximo por una red se incorporan capacidades máximas en los nodos. Modifique la red para poder aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson. Se entiende por capacidad de un nodo al máximo flujo que puede pasar por él. Gráficamente se puede observar en el siguiente ejemplo, donde se entrega la capacidad de los arcos y del nodo en cuestión.

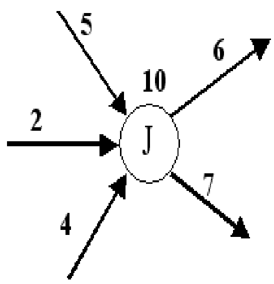

Figura 1: Ejemplo.

   Respuesta: Cada nodo que tenga capacidad se reemplaza por 2 nodos unidos por un arco con capacidad igual a la capacidad del nodo. Tal como se aprecia en la Figura.

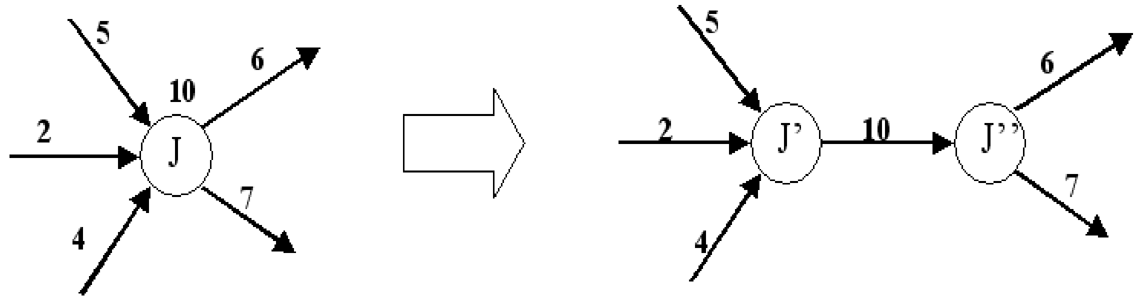

Figura 2: Ejemplo de respuesta.

Problema de Análisis de Sensibilidad y Dualidad

Suponga que es el gerente de producción de una compañía que fabrica caramelos. Esta empresa fabrica tres tipos de productos diferentes, las que sólo se diferencian en las cantidades de *chocolate* y *azúcar* necesarias para su fabricación, información que se proporciona en la siguiente tabla.

	Cantidad de Azúcar (kilos)	Cantidad de Chocolate (kilos)	Ganancias [$]
Producto 1	1	2	3
Producto 2	1	3	7
Producto 3	1	1	5

La disponibilidad de chocolate para la producción es de 100 kilos, mientras que la disponibilidad de azúcar es de 50 kilos.

1. (0,5 ptos) Formule un modelo de programación lineal que permita encontrar los niveles de producción que maximicen las ganancias de la compañía.
2. (1,5 ptos) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por aumentar marginalmente las disponibilidades de azúcar y chocolate?. Interprete económicamente el dual de este problema de optimización.
   Hint: Puede ser de utilidad plantear y resolver el problema dual.
3. (1,0 ptos) Utilizando la información de la pregunta anterior determine los niveles de producción óptimos.
4. (1,0 ptos) ¿Para qué valores de la ganancia asociada al producto 1, la base óptima no cambia?.
5. (1,0 ptos) Si se dispusiera de 60 kilos de azúcar, ¿Cuál sería la producción óptima?. ¿Cuánto serían las ganancias que la empresa obtendría en esta situación?.
6. (1,0 ptos) Considere que ahora puede fabricar un cuarto producto, que reporta una utilidad de 17 [$] y requiere de 3 kilos de azúcar y 4 kilos de chocolate para su fabricación. Compare cualitativamente las ganancias que tendría respecto a la situación inicial. ¿Tendría que fabricar esta empresa producto tipo 4 en su plan de producción óptimo?.
   OJO: no se está pidiendo que de los valores de una posible nueva solución.

Solución:

1. Sea X_i la cantidad de producto tipo i que producirá la firma. El problema primal queda dado por:

$$\text{máx } 3 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 50 \\ 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + X_3 &\leq 100 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. El problema dual queda dado por:

$$\text{mín } 50 \cdot Y_1 + 100 \cdot Y_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} Y_1 + 2 \cdot Y_2 &\geq 3 \\ Y_1 + 3 \cdot Y_2 &\geq 7 \\ Y_1 + 2 \cdot Y_2 &\geq 5 \\ Y_1, Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente, se puede ver que en el óptimo las restricciones activas en el dual son la segunda y la tercera. Despejando se obtiene $Y_1^\star = 4$, $Y_2^\star = 1$, los valores óptimos de las variables duales, lo que corresponde a *los precios sombra* de las restricciones del primal. Así, se estará dispuesto a pagar 4$ por un kilo más de azúcar y 1$ por un kilo más de chocolate.

La interpretación económica es la del *comprador* de insumos, el que desea pagar el mínimo precio por el azúcar y chocolate, asegurándose que a su actual dueño (el productor de dulces) le sea indiferente realizar la producción óptima o vender los insumos.

3. Utilizando el teorema de holgura complementaria, vemos que la variable primal asociada a la primera restricción del dual, $X_1^\star$ deberá ser igual a cero. De la misma manera X_2 y X_3 serán mayor o igual a cero. Resolviendo el sistema se obtiene $X_2^\star = X_3^\star = 25$ con un $Z^\star = W^\star = 300$.

La base asociada a esta solución optima será $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, donde $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

4. Necesitamos que X_1 continúe siendo variable no básica. Esto, en el caso de un problema de maximización con variables no negativas, es equivalente a que el costo reducido asociado sea menor o igual que cero.

$$CR_1 = x - \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Así $x \leq 6$ asegura mantener la base óptima.

5. Al aumentar el lado derecho, aseguramos que se mantiene la factibilidad y la base óptima. Así la solución básica óptima estará dada por $B^{-1} \cdot b$.

$$X^\star = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

De esta manera $Z^\star = 340$.

6. Dado que estoy agregando una variable el nuevo óptimo será *mayor o igual* al actual, puesto que si fijamos X_4 en cero, la solución actual sigue siendo factible.

   Si calculamos el costo reducido de la nueva variable, para que pertenezca a la base, NO deberá ser óptima, es decir, $CR_4 \geq 0$.

$$CR_4 = 17 - \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

   Otra manera de verlo, es darse cuenta que agregar una variable en el primal es equivalente a agregar una restricción en el dual. La restricción que debe agregarse es:

$$3 \cdot Y_1 + 4 \cdot Y_2 \geq 17$$

   la que intersecta a las 2 restricciones que actualmente son activas, por lo que en el óptimo, esta será activa y la variable primal X_4 mayor que cero.

Problema de Modelación Lineal Entera

El inminente inicio de las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol de Alemania 2006, con el partido de "la roja"el próximo 7 de septiembre en Buenos Aires contra la poderosa selección trasandina, tiene muy preocupado al técnico Juvenal Olmos. Como no quiere dejar ningún detalle librado al azar, ha decidido contratar a Giusseppe Mandinga, director de la consultora de Armijo Catalán y principal especialista chileno en programación entera, para que lo asesore en la confección de un modelo que entregue información que pueda ayudar a "la roja"en su objetivo de llegar a Alemania 2006. Luego de darle vueltas al problema, Mandinga no ha podido resolver el problema que tiene entre manos y conociendo el mal humor de Armijo, ha decidido recurrir a los alumnos de Optimización de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile para que lo apoyen. Para esto, usted debe recordar que las eliminatorias son jugadas por 10 equipos, que los 4 primeros clasifican para Alemania y que el sistema es de partido y revancha (ida y vuelta). La asignación de puntaje es: 3 puntos por victoria y 1 punto por empate. Con esta información se le pide:

1. Diseñe un modelo de programación entera que antes de realizada la primera fecha de las eliminatorias indique cuál es la mayor cantidad de puntos con que la escuadra chilena **puede no clasificar** para Alemania 2006. (4 PUNTOS)

   Solución:

   a) **Variables:**
   x_{ij}: cantidad de partidos que el equipo i le gana al equipo j.
   y_i : si el equipo i tiene los mismos o más puntos que "la roja".
   p_i : cantidad de puntos que tiene el equipo i.

   b) **Función Objetivo:**
   $$\max P_1$$
   Donde $i = 1$ es "la roja".

   c) **Restricciones:**

   1) Combinación de resultados posibles.
   $$x_{ij} + x_{ji} \leq 2 \qquad \forall\, i, j \text{ tal que } i \neq j.$$

   2) Calculo de los puntos de cada equipo.
   $$P_i = 3\sum_{j\neq i} x_{ij} + \sum_{j\neq i}(2 - (x_{ij} + x_{ji})) \qquad \forall\, i.$$

   3) Obligar a la variable y_i a tomar valor cero cuando corresponda.
   $$P_1 - P_i \leq M(1 - y_i) \qquad \forall\, i.$$

   4) Obligar a la variable y_i a tomar valor uno cuando corresponda.
   $$P_i - P_1 \leq M(y_i - 1) \qquad \forall\, i.$$

   5) Condición para quedar eliminado.
   $$\sum_{i\neq 1} y_i \geq 4$$

   6) Naturaleza de las variables.
   $$x_{ij} \in \{0, 1, 2\} \qquad \forall\, i, j.$$
   $$P_i \geq 0 \qquad \forall\, i.$$
   $$y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i.$$

2. Si una vez concluída la primera fecha "la roja"logra ganar[1] a la ya no tan poderosa selección trasandina, como incorporaría ésta información al modelo. ¿Y si el resultado fuese un empate? (1 punto)

   Solución: Para ello es necesario agregar como restricciones el resultado. La restricción asociada a un triunfo de "la roja"se escribiría de la siguiente manera, asumiendo que la selección trasandina esta asociada a 2: $x_{12} \geq 1$. En caso que el resultado fuera un empate, se deben agregar las siguientes restricciones: $x_{12} \leq 1$ y $x_{21} \leq 1$.

3. Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, qué respuesta le daría a Juvenal Olmos si éste quiere saber con cuántos puntos tiene Chile garantizada su clasificación. (1 punto)

   Solución: Como se ha visto, el modelo entrega la mayor cantidad de puntos que puede obtener un equipo y aún así tener posibilidades de no clasificar para el mundial. Dado esto, al resultado obtenido (P_1^*) se le debe agregar un punto más, con lo cual se obtiene la cantidad de puntos que asegura la clasificación.

   Sugerencia: puede utilizar dentro del modelo una variable para cada equipo rival de Chile que valga 1 si el conjunto tiene igual o más puntos que la "roja"en ese momento, y 0 en caso contrario.

Problema de ruta más corta

El algoritmo de Dijkstra permite calcular la ruta más corta para ir desde un nodo inicial hacia todos los demás nodos de una red determinada.

1. ¿Cómo modificaría una red dada si le pidieran que aplique el algoritmo de Dijkstra, una única vez, para encontrar las rutas más cortas desde cada uno de los nodos de la red hacia un nodo inicial? Aplíquelo a resolver el problema en la siguiente red donde el nodo inicial es el 5. (2 PUNTOS)

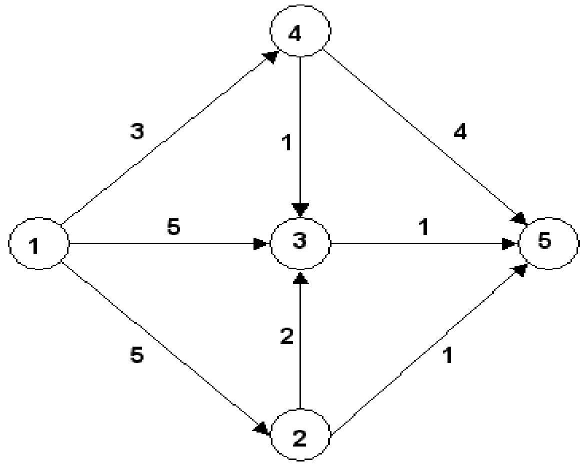

Figura 3: Red asociada al problema.

   Solución: En ese caso, se debe invertir el sentido de los arcos y resolver el problema sobre la red modificada utilizando el algoritmo. Una vez obtenidos los resultados se debe recuperar la red original.

2. ¿Cómo resolvería de manera simple el problema de calcular las rutas más cortas entre cualquier par de nodos? (1 PUNTO)

[1] Imaginemos un 2 a 0 a favor, goles de Armijo Catalán y Giovanni Mandinga.

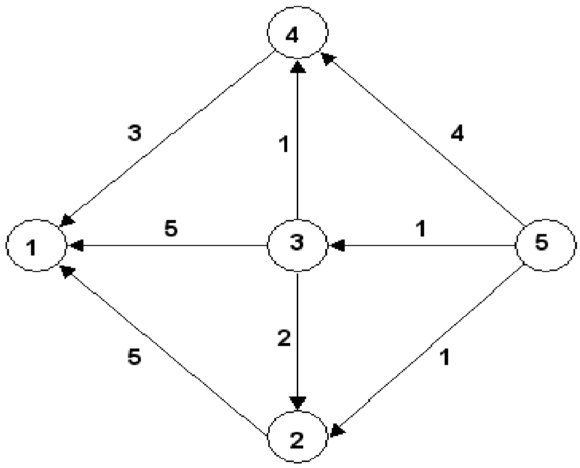

Figura 4: Red asociada al problema.

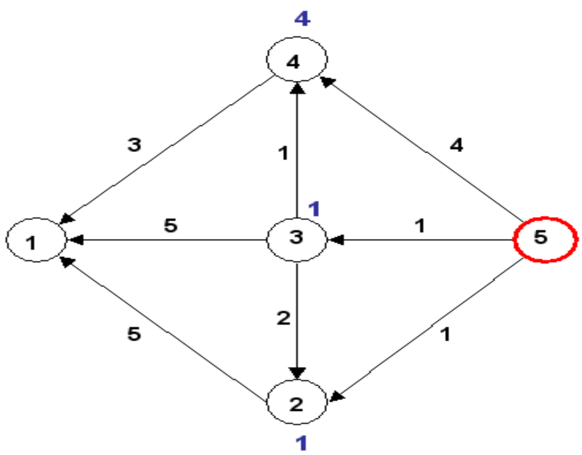

Figura 5: Red asociada al problema.

Solución: La manera más simple de utilizar el algoritmo consistiría en resolver el algoritmo utilizando cada nodo como nodo inicial, luego, se debería resolver n veces el algoritmo de Dijkstra.

3. ¿Porqué el algoritmo de Dijkstra puede no funcionar correctamente si hay algún arco con longitud negativa? Entregue un ejemplo donde el algoritmo falle sin que existan circuitos de longitud negativa. (3 puntos)

   Solución: La idea es que si existe un arco de longitud negativa el algoritmo no considerará la posibilidad de cambiar la etiqueta a algún nodo ya visitado. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo mostrado en la Figura 11:

   De la Figura 2 se puede apreciar que al partir desde el nodo 1, el algoritmo indicará que se debe avanzar al nodo 3, luego al nodo 2 (también desde el 1). Luego, para ir al nodo 3 desde el nodo 2 se disminuirá el costo en -2, dando un total de 1 contra 2 que es el valor encontrado por el algoritmo.

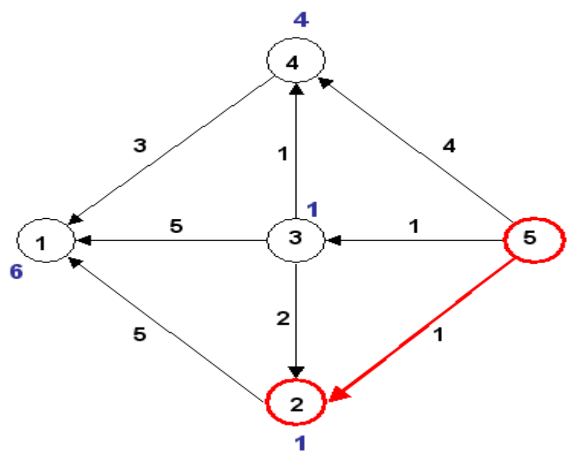

Figura 6: Red asociada al problema.

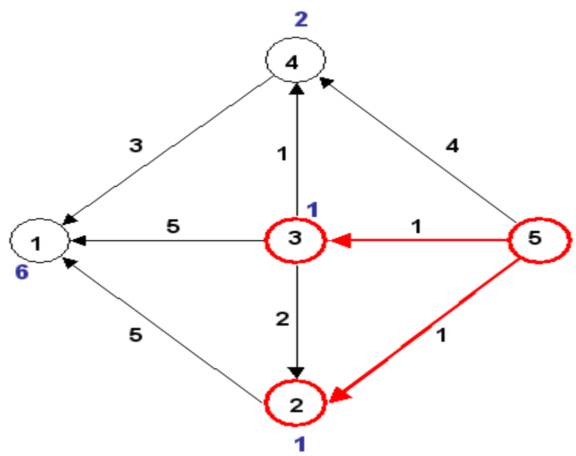

Figura 7: Red asociada al problema.

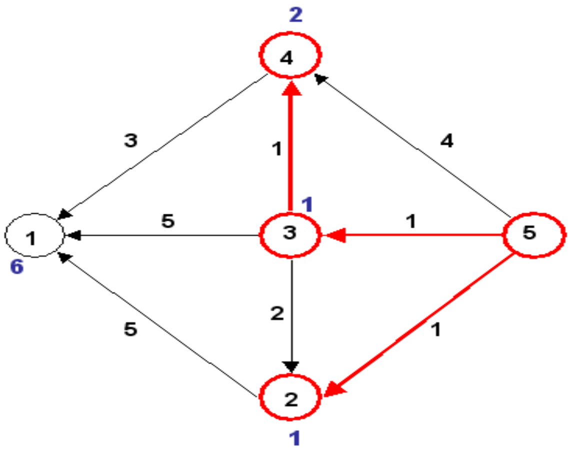

Figura 8: Red asociada al problema.

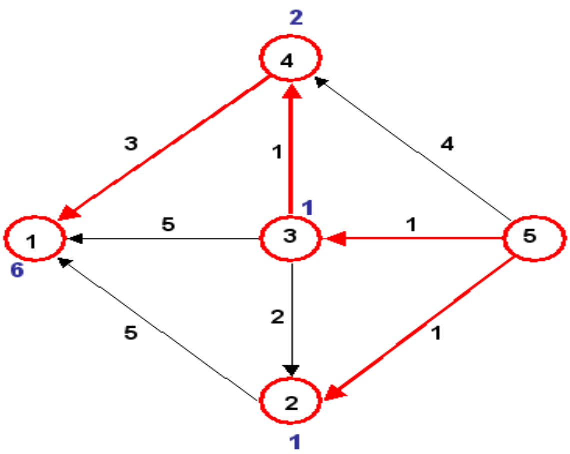

Figura 9: Red asociada al problema.

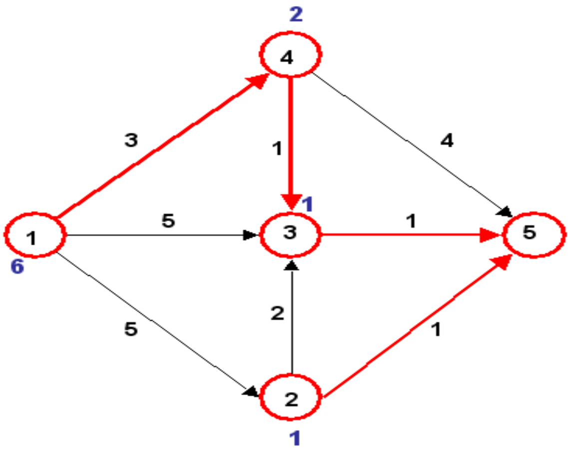

Figura 10: Red asociada al problema.

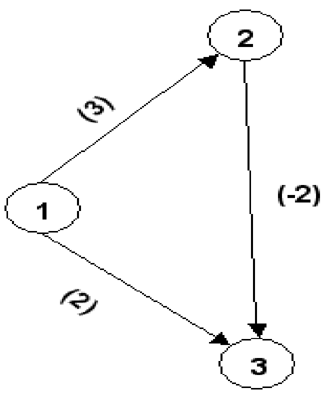

Figura 11: Red asociada al problema.