



Profesores: Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Richard Weber, Gabriel Weintraub
Auxiliares: Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Andrés Pardo, Juan Pablo Troncoso, Richard Vega

I

Dado un grafo $G = [N, A]$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4), (3, 5), (2, 5), (4, 5)\}$. La cota superior y inferior para el flujo f_{ij} en un arco $(i, j) \in A$ es u_{ij} y l_{ij} respectivamente. El costo del flujo de una unidad en el arco (i, j) es c_{ij} . La siguiente tabla contiene las cotas superiores (u_{ij}) y los costos (c_{ij}) para cada arco.

| (i, j) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (3,4) | (3,5) | (2,5) | (4,5) |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| u_{ij} | 20 | 20 | 8 | 16 | 5 | 15 | 20 |
| c_{ij} | 40 | 10 | 15 | 3 | 12 | 20 | 25 |

La cota inferior para el flujo en cada arco es igual a cero ($l_{ij} = 0 \forall (i, j) \in A$).

Determine un flujo en el grafo G que transporte 15 unidades de un producto del origen (nodo 1) al destino (nodo 5) con costo mínimo a partir de la siguiente solución factible:

| (i, j) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (3,4) | (3,5) | (2,5) | (4,5) |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f_{ij} | 0 | 15 | 0 | 15 | 0 | 0 | 15 |

¿Cuál es el flujo óptimo? ¿Cuáles son los costos totales en el óptimo?

II

Luego de un importante esfuerzo de ahorro durante el año, usted ha juntado una cantidad de dinero B que dispone para gastar en las vacaciones venideras. Sus vacaciones tienen una duración de N días y usted debe decidir cuánto dinero gastar cada día. Usted, muy rigurosamente, ya ha planeado las posibles actividades diarias a realizar y sabe que el beneficio percibido en el día i de sus vacaciones (con i desde 1 a N) es $f_i(x_i)$ en que x_i es el dinero gastado en ese día.

- ¿Por qué programación dinámica puede ser una técnica adecuada para resolver este problema? (1 punto)
- Formule un modelo de programación dinámica que le permita obtener la política óptima de gasto de dinero diario. ¿Cuáles son las variables de decisión, las variables de estado, la expresión recursiva del beneficio acumulado? ¿Qué problema se resuelve en el período i ? (2,5 puntos)
- Explique el método iterativo a través del cual encontraría la solución del modelo anteriormente formulado. (1,5 punto)
- ¿Bajo qué condiciones este problema se puede formular como un problema de programación lineal? Escriba el modelo. (1 punto)

III

La candidata a la presidencia Srta. Gladys Lavín, ha decidido intensificar su campaña en este último período con el fin de mejorar sus opciones al sillón presidencial. De esta manera, ha encargado un estudio de opinión que le proporcione información para decidir acerca de los temas claves de su programa de gobierno y para decidir cómo debe comunicar esto al electorado.

Al respecto, el estudio revela que los tres grandes temas que le preocupan a la ciudadanía son: Salud, Educación e Igualdad. Teniendo en cuenta cada uno de ellos se estimó en el estudio la cantidad de votos que obtendría la candidata de acuerdo a los distintos cursos de acción posibles:

- Si su plan de gobierno promete que la Salud, la Educación y la Igualdad seguirán igual que en el gobierno anterior, entonces la candidata obtendría $V_0\%$ de votos.
- Si, en cambio, la candidata prometiera mejoras en la salud, ésta obtendría los siguientes beneficios electorales:

| | Medidas | Beneficios Electorales respecto a V_0 | Costo |
|-----------|---|---|-------|
| Salud | Ampliación de la infraestructura hospitalaria | 2,0% más de votos | G1 |
| | Reducción de costos de atención médica | 5,0% más de votos | G2 |
| Educación | Plan de Mejoramiento de la Educación Media | 1,0% más de votos | G3 |
| | Plan de Mejoramiento de la Educación Superior | 3,0% más de votos | G4 |
| Igualdad | Políticas de Redistribución del Ingreso | 1,5% más de votos | G5 |
| | Programas de desarrollo de minorías étnicas | 3,5% más de votos | G6 |

La candidata está consciente de que es imposible “prometerlo todo”; pues, además de que su conciencia se lo impediría, sería seguramente calificada por la opinión pública como “demagoga”. De esta manera, espera que el conjunto de medidas no supere el presupuesto de “P”\$ del cual dispondrá el futuro gobierno.

Además se deben tener en cuenta ciertas consideraciones:

- En cada una de las áreas (Salud, Educación e Igualdad) al menos una medida debe ser propuesta.
- En el área de Educación no se puede proponer más de una medida, en contraste con las otras áreas en las cuáles, si el presupuesto lo permite, se puede proponer más de una medida (es decir, las dos de cada área).

Finalmente, la candidata cuenta con un presupuesto de A\$ para su campaña electoral que puede destinar a publicidad. Su idea es seleccionar no más de dos de las áreas e invertir una cierta cantidad de dinero en comunicar al electorado cada de una de las medidas referidas a dichas áreas que estén incluidas en el programa.

Para esto debe decidir además cuánto dinero invertir en la publicidad de cada medida de las áreas seleccionadas para la publicidad. Se estima que por cada peso invertido en publicitar una cierta medida la candidata obtendría $a_i\%$ más de votos ($i=1..6$ – índice de las medidas) que los que obtendría sin esta publicidad. (Sólo se podrán publicitar aquellas medidas que serán parte del programa de gobierno definitivo de la candidata, es decir, si la candidata decidió no mejorar la educación media no se hará publicidad en torno a esa medida).

Formule un Modelo Lineal Mixto que permita a la candidata determinar cuáles deben ser las medidas a incluir en su programa de gobierno y cuáles de ellas deben ser publicitadas de modo que la candidata obtenga la mayor cantidad de votos cumpliendo con las consideraciones enunciadas.

IV

- (1 pto) Suponga que se debe resolver un problema de programación no lineal sin restricciones y para ello se opta por aplicar primero el algoritmo del gradiente y luego el algoritmo de Newton. Señale qué ventaja tiene este procedimiento frente a la alternativa de aplicar sólo el algoritmo del gradiente y sólo el algoritmo de Newton.
- (1 pto) Se tiene un problema de programación lineal en donde x_s es no restringida en signo. Para resolverlo, x_s se reemplaza por $x_s' - x_s''$. Explique si es posible que en la solución óptima se tenga $x_s' > 0$ y $x_s'' > 0$.
- (1 pto) Identifique o rechace la siguiente afirmación: “Al aplicar Branch and Bound, en lugar de resolver los problemas definidos en las ramificaciones, es preferible resolver duales”.
- (1 pto) Sea un problema de programación lineal con solución óptima conocida. Sea x_b variable básica en el óptimo y suponga que c_b cambia sin que cambie la solución básica óptima. En la solución óptima del dual, señale si cambia o no lo siguiente:
 - Valor de la función objetivo
 - Valor de las variables
 - Valor de los costos modificados
- (1 pto) Señale si es posible o no definir el concepto de precio sombra para un problema de programación lineal entera.
- (1 pto) Indique si en una iteración del algoritmo simplex especializado de redes es posible la degeneración. En caso afirmativo, indique en que circunstancias puede ocurrir.

PAUTA EXAMEN

P1

Solución inicial: $f_{13} = 15$ $f_{34} = 15$ $f_{45} = 15$ $f_{12} = 0$

Variables básicas:

$$\bar{C}_{13} = C_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 10 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$

$$\bar{C}_{12} = C_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 40 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$

$$\bar{C}_{34} = C_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 3 - \pi_3 + \pi_4 = 0$$

$$\bar{C}_{45} = C_{45} - \pi_4 + \pi_5 = 25 - \pi_4 + \pi_5 = 0$$

$$\pi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_3 = -10 \quad \Rightarrow \quad \pi_4 = -13 \quad \Rightarrow \quad \pi_5 = -38$$

$$\pi_2 = -40$$

Costos reducidos de las variables no básicas:

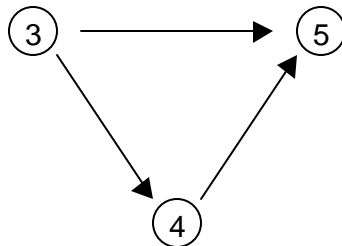
$$\bar{C}_{25} = C_{25} - \pi_2 + \pi_5 = 20 - (-40) + (-38) = 22$$

$$\bar{C}_{35} = C_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 12 - (-10) + (-38) = -16 \quad \Leftarrow$$

$$\bar{C}_{14} = C_{14} - \pi_1 + \pi_4 = 15 - 0 + (-13) = 2$$

Entra f_{35}

\Rightarrow ciclo:



$$C_1 = 0$$

$$\theta_1 = \infty$$

$$C_2 = \{(3,4), (4,5)\}$$

$$\theta_2 = \min \{ 15 - 0, 15 - 0 \}$$

$$\theta_3 = 5$$

$$\theta = \min \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}$$

| | | | | | |
|---------------|----------------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| \Rightarrow | Variables básicas | $f_{13} = 15$ | $f_{34} = 10$ | $f_{45} = 10$ | $f_{12} = 0$ |
| | Variables no básicas | $f_{35} = 5$ | $f_{14} = 0$ | $f_{25} = 0$ | |

Costos reducidos de las variables básicas:

$$\bar{C}_{13} = C_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 10 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$

$$\bar{C}_{12} = C_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 40 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$

$$\bar{C}_{34} = C_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 3 - \pi_3 + \pi_4 = 0$$

$$\bar{C}_{45} = C_{45} - \pi_4 + \pi_5 = 25 - \pi_4 + \pi_5 = 0$$

$$\pi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \pi_3 = -10 \\ \pi_2 = -40 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \pi_4 = -13 \\ \pi_5 = -38 \end{matrix}$$

Costos reducidos de las variables no básicas:

$$\bar{C}_{25} = C_{25} - \pi_2 + \pi_5 = 20 - (-40) + (-38) = 22$$

$$\bar{C}_{35} = -C_{35} - \pi_3 + \pi_5 = -12 + (-10) - (-38) = 16$$

$$\bar{C}_{14} = C_{14} - \pi_1 + \pi_4 = 15 - 0 + (-13) = 2$$

$$\bar{C}_{ij} \geq 0 \quad \forall \text{ variables no básicas}$$

Flujo óptimo:

| | |
|--------------------------|----------------------|
| $f_{13} = 15$ con costos | 150 |
| $f_{34} = 10$ con costos | 30 |
| $f_{45} = 10$ con costos | 250 |
| $f_{35} = 5$ con costos | 60 |
| | <hr/> |
| | 490 = Costos totales |

P2

- a) El problema puede dividirse en etapas (días), en que en cada una se toma una decisión. Además, estas decisiones están interrelacionadas (si gasto más hoy, tengo que gastar menos mañana). Es decir, existe una secuencia de decisiones interrelacionadas.

- b) Modelo de P.D.

Sean x_i = cantidad de dinero a gastar en día i (variable de decisión)

S_i = cantidad de dinero disponible a comienzos del día i (variables de estado)

$V_i(S_i, x_i)$ = beneficio acumulado desde día i hasta el final (N), si en el día i se gasta x_i y se llega con S_i . $i = 1, \dots, N$

En el último período (N) se resuelve:

$$\begin{aligned} V_N(S_N, x_N) &= f_N(x_N) & (*) \\ V_N^*(S_N) &= \max_{0 \leq x_N \leq S_N} f_N(x_N) \end{aligned}$$

En el resto ($i = 1, \dots, N-1$), se resuelve:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, x_i) &= f_i(x_i) + V_{i+1}^*(S_{i+1}) & (**) \\ V_i^*(S_i) &= \max \{ f_i(x_i) + V_{i+1}^*(S_{i+1}) \} \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x_i \leq S_i \\ & S_{i+1} = S_i - x_i \end{aligned}$$

- c) Se resuelve el problema para el período N (*) y se encuentra $x_N^* = x_N^*(S_N)$. Luego, nos vamos a un período más atrás y se encuentra $x_{N-1}^* = x_{N-1}^*(S_{N-1})$ al resolver (**) para $i = N-1$.

Se repite el procedimiento hasta llegar a $i = 1$.

Finalmente tenemos $S_1 = B$, con el cual se obtiene $x_1^*(B)$.

Luego, se tiene $S_2 = B - x_1^*(B)$, con lo cual se obtiene $x_2^*(S_2)$, etc.

Hasta llegar a $x_N^*(S_N)$ y así obtener la política óptima.

- d) Se puede formular como un modelo de P.L. si $f_i(x_i)$ son funciones lineales $\forall i = 1 \dots N$. El modelo es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N x_i \leq B \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

P3

Variables de Decisión: (1,5 puntos; 0,5 por cada tipo de variable, en el caso de 3 tipos)

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si incluye la medida } i \text{ en su programa} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad i=1..6$$
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si publicita el área } j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad j=1..3$$

z_i = cantidad a invertir en publicidad para la medida i $i=1..6$

(Nota: Es posible modelar el problema a partir de variables "x" e "y" que contengan índices "i" y "j" denotando medida y área).

Restricciones:

0) No negatividad: $z_i \geq 0$ $i=1..6$ (0,1 pts.)

1) Consistencia entre "y_j" y "z_i": (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} z_1 &\leq M \cdot y_1, \\ z_2 &\leq M \cdot y_1, \\ z_3 &\leq M \cdot y_2, \\ z_4 &\leq M \cdot y_2, \\ z_5 &\leq M \cdot y_3, \\ z_6 &\leq M \cdot y_3 \end{aligned} \quad (M \text{ número muy grande}).$$

2) En cada una de las áreas por lo menos se debe incluir una medida, salvo en Educación en la cual debe incluirse una medida: (0,5 puntos)

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{Esta restricción, de acuerdo al enunciado se podría escribir a través de dos desigualdades: } x_3 + x_4 \geq 1 ; x_3 + x_4 \leq 1)$$

$$x_5 + x_6 \geq 1$$

3) Se publicitan sólo las medidas incluidas en el programa: (0,5 puntos) $x_i \geq y_i$ $i=1..6$

4) Se eligen a lo más dos áreas a publicitar: (0,5 puntos) $y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$

5) Restricción Presupuestaria para las medidas: (0,5 puntos) $\sum_{i=1}^6 x_i \cdot G_i \leq P$

6) Restricción Presupuestaria para la publicidad: (0,4 puntos) $\sum_{i=1}^6 z_i \leq A$

Función Objetivo (se puede eliminar V_0 pues es una constante): (1,5 puntos)

$$F.O. = V_0 + 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 1,5x_5 + 3,5x_6 + \sum_{i=1}^6 a_i \cdot z_i$$

P4

- a) El algoritmo del gradiente tiene baja convergencia al óptimo y el algoritmo de Newton no da seguridad de orientarse a un mínimo local o global, situación que si asegura el algoritmo del gradiente. Luego al aplicar gradiente y luego Newton se asegura una correcta orientación y luego una buena convergencia.
- b) Es claro que A_s' y A_s'' son vectores linealmente dependientes, luego x_s' y x_s'' no pueden ser ambas básicas.
- c) La afirmación es correcta. Al ramificar los problemas van aumentando en número de restricciones. Sin embargo, los respectivos duales mantienen las restricciones pero aumenta el número de variables. Es más fácil resolver problemas con más variables sin aumentar el número de restricciones.
- d) Si no cambia la solución básica del primal entonces no cambia la matriz básica del primal, pero si cambian los valores duales óptimos ya que c_b ha cambiado.

Por tanto en el dual se tiene que:

- Cambia el valor de la F.O. en el óptimo.
 - Cambia el valor de las variables.
 - No cambian los costos modificados ya que no se ha cambiado b_i .
- e) No es posible. Si b_i tiene un primer aumento unitario la F.O. puede aumentar en una cantidad distinta a un segundo aumento unitario.
- f) Si es posible la degeneración
Ello puede ocurrir en los siguientes casos:
 - i) 2 variables básicas que disminuyen de valor llegan simultáneamente a su cota inferior.
 - ii) 2 variables básicas que aumentan de valor llegan simultáneamente a su cota superior.
 - iii) 1 variable básica que aumenta de valor llega a su cota superior simultáneamente con otra variable básica que disminuye llegando a su cota inferior.
 - iv) La variable que ingresa a la base llegue a su otra cota y no coincida con que una variable básica alcance su cota.