



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y  
Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial  
IN34A Optimización  
Semestre Primavera 2006

Profesores: Guillermo Duran  
Sebastian Souyris  
Richard Weber  
Auxiliares: Jaime Gacitua  
Leonardo Lopez  
Ximena Schultz  
Rodrigo Wolf

**CTP 4**  
**Miércoles 15 de Noviembre de 2006**

**Problema 1** (3 puntos)

En la autopista Costanera Norte deben fijar los precios para los próximos  $T$  años, este precio puede ir variando de un año en otro, eso si la variación debe respetar la legislación chilena, la que le da tres opciones a la autopista al comienzo de cada año: subir el precio en un 25%, mantenerlo o bajarlo en un 25%. Además en cada momento durante los  $T$  años la resta acumulada entre los años que decidió subir los precios menos los que lo bajo puede ser como máximo  $M$  ( $M < T$ ). El precio actual hoy (entendiéndose por hoy el año cero) es  $P$ .

Los ejecutivos de esta obra vial, desean maximizar el beneficio de los próximos  $T$  periodos en conjunto. Es importante señalar que ellos saben cuanta gente va a usar la autopista en un año y que este valor va a depender de si suben el precio, lo mantienen o lo bajan, de esta forma  $q_{st}$  es la cantidad de gente que va a usar la autopista en el año  $t$  si este año el precio subió,  $q_{mt}$  es el número de personas que va a usar la autopista en el año  $t$  si este año el precio se mantiene y  $q_{bt}$  es la cantidad de usuarios que van a recibir si los precios en el año  $t$  bajan

Para fines del problema **suponga** que todas las personas que usarán la autopista poseen TAG, además, todos los que la usan pagan el precio estipulado y este precio se paga por el simple hecho de usar la autopista y no depende de los tramos que se recorren<sup>1</sup>. También **suponga** que los beneficios residuales, es decir, de  $T+1$  en más son cero.

Modele la situación recién descrita utilizando programación dinámica.

**Problema 2** (3 puntos)

La exitosa especuladora de Wall Street, Mari Ultz debe decidir que acciones dentro de las  $A$  disponibles comprará esta mañana en el vertiginoso mercado bursátil de New York.

Para esto, Mari cuenta con  $M$  unidades monetarias (U.M.) para invertir y sabe que una acción  $i$  cualquiera dentro de las  $A$  disponibles vale  $P_i$  U.M, ella también sabe que si compra  $n$  acciones de  $i$  recibirá un retorno de  $R_{in}$  U.M al final del día (por ejemplo si compra 2 acciones de la empresa  $i$  incurre en un costo de  $2 \cdot P_i$  y obtiene ganancias de  $R_{i2}$ ). En todo caso Ultz no compra más de  $N$  acciones de una misma empresa (es decir, puede llegar a comprar inclusive  $N$  acciones de una misma compañía)

El modelo de programación dinámica de este problema es el siguiente:

Etapas

$1, \dots, A$  (las acciones)

---

<sup>1</sup> Por ejemplo dos autos que entran a la costanera en una misma entrada y uno se sale en la próxima salida y el otro la recorre entera pagarán lo mismo, que en el caso del año actual sería  $P$ .

Estados

$Y_a$  = Dinero disponible al inicio de la etapa  $a$

Variable de decisión

$X_a$  = Número de acciones a comprar en la etapa  $a$

Recurrencia

$$Y_{a+1} = Y_a - X_a * P_a$$

Función de Beneficio

$$V_a(Y_a, X_a) = R_{a, X_a} - X_a * P_a + V_{a+1}^*(Y_{a+1})$$

$$V_a^*(Y_a) = \max_{X_a} V_a(Y_a, X_a)$$

$$0 \leq X_a * P_a \leq Y_a$$

$$0 \leq X_a \leq N$$

Condiciones de Borde:

$$Y_1 = M; \quad V_{A+1} = Y_A - X_A P_A$$

Resuelva el modelo recién descrito para:

$$A=3, \quad M=30, \quad N=5, \quad P_1=P_2=P_3=7$$

$R_{10}$	$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	$R_{14}$	$R_{15}$
0	10	20	30	45	50
$R_{20}$	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$	$R_{24}$	$R_{25}$
0	30	60	100	120	150
$R_{30}$	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$	$R_{34}$	$R_{35}$
0	35	70	90	115	170

Además concluya que es lo que ella debe hacer y que utilidad le reportaría hacer esto.

**Tiempo: 70 minutos**

## Solución

1-

**Etapas** (0,3 puntos)

Los años,  $t: 1, \dots, T$

**Variables de Estado** (0,2 cada una)

$p_t$  = el precio del período anterior

$c_t$  = resta acumulada hasta el período anterior de veces que ha subido menos veces que ha bajado el precio

**Variable de Decisión** (0,5)

$X_t = 1$  si se decide subir el precio en  $t$ ; 0 si se decide mantener el precio en  $t$  y -1 si se decide bajar el precio en  $t$ .

**Recurrencia** (0,25 cada una)

$$p_{t+1} = p_t + 0,25p_t * X_t$$

$$c_{t+1} = c_t + X_t$$

**Condiciones de Borde** (0,2 cada una)

$$p_1 = P$$

$$c_1 = 0$$

$$V_{T+1} = 0$$

**Función de Beneficios** (0,2 por el s.a; 0,5 el resto)

$$V_t^* = \max_{X_t} \{ (p_t + 0,25p_t * x_t) q_{X_t,t} + V_{t+1}^* (p_{t+1}, c_{t+1}) \}$$

s.a

$$c_t + x_t \leq M$$

**OJO:** el problema también se pudo resolver con tres variables binarias:  $x_t = 1$  si decide subir el precio, 0 caso contrario;  $y_t = 1$  si decide bajar el precio, 0 caso contrario.  $z_t = 1$  si lo mantiene, 0 caso contrario. Si se resolvió así se debe agregar una restricción que señale que la suma de las variables de decisión es menor o igual a uno.

Además la forma de escribir las recurrencias y la función de beneficios cambian:

$$p_{t+1} = (p_t + 0,25p_t) * X_t + p_t * z_t + (p_t - 0,25p_t) * y_t$$

$$c_{t+1} = c_t + X_t - Y_t$$

$$V_t^* = \max_{X_t, Y_t, Z_t} \{ (p_t + 0,25p_t) * q_{s,t} * x_t + (p_t * q_{m,t}) * z_t + ((p_t - 0,25p_t) * q_{b,t}) * y_t + V_{t+1}^* (p_{t+1}, c_{t+1}) \}$$

s.a

$$c_t + x_t \leq M$$

$$x_t + z_t + y_t \leq 1$$

En caso de hacerlo así los puntajes se mantienen, salvo el puntaje de las variables de decisión se divide en 0,1 por cada variable y 0,2 por especificar la restricción adicional en alguna parte del problema (donde sea).

*(Además siempre pueden aparecer nuevas formas)*

2-

### A=3

Y3-X3	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	30	28+23	56+16	69+9	87+2	-	89	4
23	23	28+16	56+9	69+2	-	-	71	3
16	16	28+9	56+2	-	-	-	58	2
9	9	28+2	-	-	-	-	30	1
2	2	-	-	-	-	-	2	0

### A=2

Y2-X2	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	0+89	23+71	46+58	79+30	92+2	-	109	3
23	0+71	23+58	46+30	79+2	-	-	81	1 o 3
16	0+58	23+30	46+2	-	-	-	58	0
9	0+30	23+2	-	-	-	-	30	0
2	0+2	-	-	-	-	-	2	0

### A=1

Y1-X1	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	0+109	3+81	6+58	9+30	17+2	-	109	0

Por lo tanto la solución (lo que debe hacer) es comprar 0 de 1; 3 de 2 y 1 de 3. Esto le genera una utilidad de 109.

(1 punto por tabla A=3; 1 punto tabla A=2; 0,25 tabla A=1; 0,5 por decir cuanto debe comprar de cada uno; 0,25 por la utilidad. Por cada número malo en las tablas bajar 0,2, hasta llegar a 0. Los errores se penalizan una vez, es decir, si se equivoco en un número de la tabla después del 0,2 menos se le corrige como si ese fuese el valor correcto. La columna compra 5 es omitible de las tablas)