Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán, Sebastián Souyris
Richard Weber
Aux: Jaime Gacitúa, Leonardo López
Ximena Schultz, Rodrigo Wolf

Control 3

08 de Noviembre de 2006

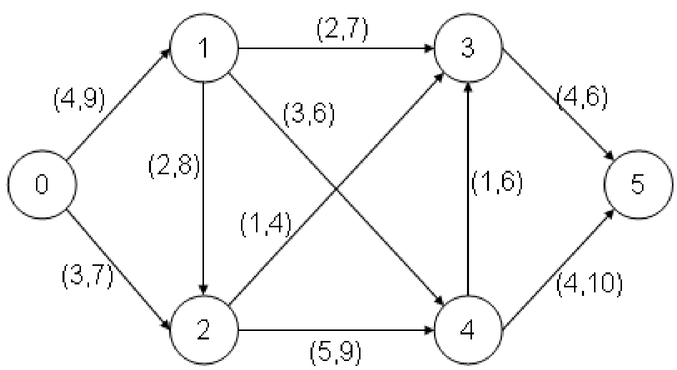
Pregunta 1

Responda las siguientes preguntas:

1. (1.5 ptos.) ¿En qué casos se puede detener la ramificación en un nodo durante la aplicación del algoritmo Branch&Bound (B&B)? Mencione 3 casos con justificación.
2. (3 ptos.) Plantee el modelo lineal para el problema de la "Ruta más corta" visto en clase. Este modelo exige variables de decisión binarias. Plantee un modelo equivalente con variables continuas. Para este modelo con variables continuas ¿existe siempre una solución óptima con valores binarios? ¿Por qué?
3. (1.5 ptos.) ¿Por qué el algoritmo de Dijkstra requiere costos no-negativos en los arcos? Explique su respuesta.

Pregunta 2

Sea $G = [N, A]$ la siguiente red con cotas superiores e inferiores para el flujo factible que puede pasar por cada arco.



1. (1 ptos.) Diseñar la red auxiliar G' que permite analizar la existencia de un flujo factible en G.
2. (2 ptos.) Encontrar el flujo máximo en G' usando Ford y Fulkerson. Detalle cada iteración del algoritmo.
3. (1 ptos.) Encontrar todos los cortes de capacidad mínima en G'.
4. (1 ptos.) Explicar si existe un flujo factible en G especificando la propiedad que está usando.
5. (1 ptos.) Si la respuesta en 4 es si, hallar el flujo máximo de G usando Ford y Fulkerson. Si la respuesta en 4 es no, modificar alguna capacidad de G de modo de que exista flujo factible y obtener el flujo máximo usando Ford y Fulkerson.

Pregunta 3

En este problema modelaremos una versión simplificada del de la planificación de horarios y salas de clases de una carrera universitaria.

El conjunto de cursos que deben dictarse es C, y a cada uno de ellos deben asignarse dos módulos de cátedra y uno de auxiliar. El número de alumnos por curso es $a_c, \forall c \in C$. Por simplificación, suponga que se pueden dictar clases de Lunes a Viernes, y que cada día tiene 7 módulos ($[1, 2, 3, 4]$ en la mañana y $[5, 6, 7]$ en la tarde). Para cada curso, en un día determinado, puede dictarse a los mas una cátedra o una auxiliar (i.e. no pueden dictarse dos cátedras o una cátedra y una auxiliar).

Por malla curricular de la carrera cada curso pertenece a alguno de los T semestres, lo cual queda representado por el conjunto $Cur(t), \forall t \in T$, que contiene todos los cursos pertenecientes al semestre t. Todos los cursos de un mismo semestre deben tener horarios diferentes.

Los profesores no pueden dictar cátedra en todos los horarios posibles. Esto esta representado por el parámetro $disp_{cdm}$, que es igual a 1 si el profesor del curso c puede dictar clase en el módulo m del día d, 0 si no. Los profesores auxiliares tiene disponibilidad completa.

El conjunto de salas disponibles es S, y la capacidad de la sala $s \in S$ es cap_s.

El numero de semestres es T,

1. (4 ptos.) Con esta información planteé un modelo lineal entero binario qué permita decidir en que día, módulo y sala debe dictarse cada cátedra y cada auxiliar, de forma tal de minimizar la cantidad de cátedras que son asignados en horarios de la tarde.

2. (2 ptos.) Suponga ahora que la asignación a realizar debe minimizar la cantidad de alumnos que tendrá topes de horario. Para ello se tiene una estimación del número de alumnos que tomará cada par de cursos: $topes_{cp}, \forall c, p \in C$. Por ejemplo, $topes_{Algebra,Calculo} = 50$ y $topes_{Algebra,Optimizacion} = 0$, entonces es altamente indeseable que Algebra y Cálculo tengan el mismo horario, pero para Algebra y Optimización da lo mismo. Modifique el modelo de la parte 1 de forma tal de minimizar la cantidad de alumnos que tendrá tope de horarios.

   Indicación parte 2: cree una variable binaria que indique si el par de cursos c y p tendrán ambos clase en el módulo m del día d.

Tiempo: 3 horas.

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán, Sebastián Souyris
Richard Weber
Aux: Jaime Gacitúa, Leonardo López
Ximena Schultz, Rodrigo Wolf

Pauta Control 3

08 de Noviembre de 2006

Pregunta 1

1. (1.5 ptos.)
   - El nodo generó un problema infactible.
   - La solución del problema en ese nodo es entera.
   - La solución del problema en ese nodo es fraccionaria pero es "peor"que alguna entera que ya ha sido obtenida (el valor de la incumbente).

2. (3 ptos.) Dado un grafo $G = [N, A]$ en el cual se identifican el nodo de origen s de la ruta y el nodo destino t, sea c_{ij} el costo asociado al arco (i, j) y x_{ij}, la variable de decisión que determina el flujo en (i, j). El modelo de programación lineal binaria que permite determinar cómo enviar una unidad no fraccionable del flujo desde el nodo s al t, a costo mínimo es:

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}\\
&s.a.\\
&\sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{k:(k,s)\in A} x_{ks} = 1\\
&\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 0 \quad \forall i \neq s,t\\
&\sum_{j:(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{k:(k,t)\in A} x_{kt} = -1\\
&x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

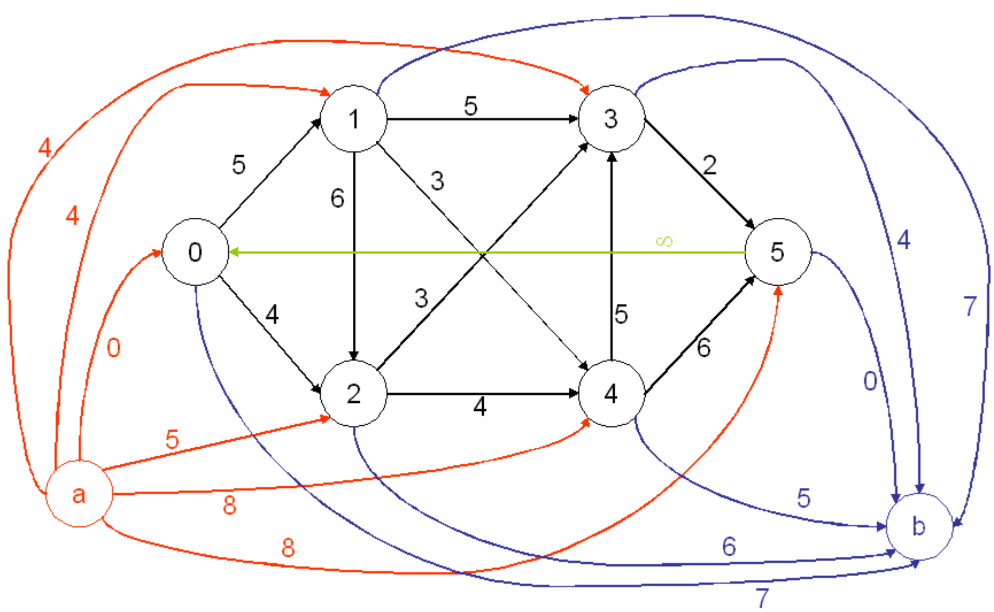
Si $x_{ij} = 1$ significa que el arco (i, j) pertenece a la ruta más corta, y $x_{ij} = 0$ en caso contrario. Como la matriz de incidencia nodo-arco de un grafo orientado es totalmente unimodular, si se relajan las restricciones de binariedad de las variables sustituyéndolas por $0 \leq x_{ij} \leq 1$, la solución óptima del problema relajado (si existe) será de todos modos binaria. De esta forma, se puede encontrar una solución del problema binario resolviendo el siguiente problema lineal continuo:

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}\\
&s.a.\\
&\sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{k:(k,s)\in A} x_{ks} = 1\\
&\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 0 \quad \forall i \neq s,t\\
&\sum_{j:(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{k:(k,t)\in A} x_{kt} = -1\\
&0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

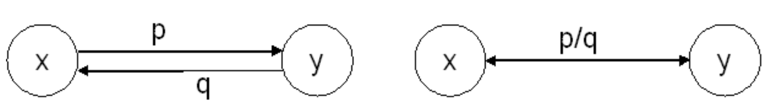
3. (1.5 ptos.) El algoritmo de Dijkstra genera un conjunto S, en principio vacío, que determinar la ruta más corta. Dados los menores costos acumulados conocidos para llegar desde el nodo origen a cada nodo i, dados por $\pi(i)$, en cada iteración se agrega el nodo que posee el menor costo acumulado desde el nodo origen. Es decir, busca en nodo j no perteneciente a S tal que $\pi(j) = \min_{k \in T}\{\pi(k)\}$. El problema de tener costos negativos, radica en que al escoger este nodo j, explorará cuánto cuesta avanzar por esta ruta, pero nunca explorará cuánto cuesta avanzar por las rutas que determinan los nodos que no tienen el menor costo acumulado. Si existen arcos con costos negativos luego de un arco que no posee el menor costo acumulado desde el origen, Dijkstra nunca podrá observar que este arco negativo disminuye el costo de ruta. Luego, puede suceder que exista un arco negativo bajo estas condiciones, que compense los mayores costos de los arcos iniciales y que en definitiva sea la ruta de costo mínimo pero que el algoritmo nunca la explore y, por lo tanto, retorne como resultado una ruta no óptima.
Por ejemplo, en una red de 3 nodos, donde hay un camino de 1 al 3 de longitud 2, de 1 al 2 de longitud 3 y otro de 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta mas corta de 1 a 3. Encuentra el camino de longitud 2 y no el de longitud 1.

Pregunta 2

1. Como los arcos del grafo G poseen capacidades inferiores no nulas, F=0 no es un flujo factible. Entonces debemos encontrar un flujo factible inicial. Para esto debemos determinar el flujo máximo F^* en G' a través de Ford y Fulkerson. El grafo auxiliar G' es el siguiente, el cual muestra la cantidad máxima de flujo a través de cada arco (el flujo mínimo es cero):



2. Determinemos el flujo máximo F^* en G' a través de Ford y Fulkerson. Como el flujo mínimo a través de cada arco es cero, un flujo factible inicial es cero.
Para efectos didácticos, se utilizará la siguiente notación para no saturar las figuras:



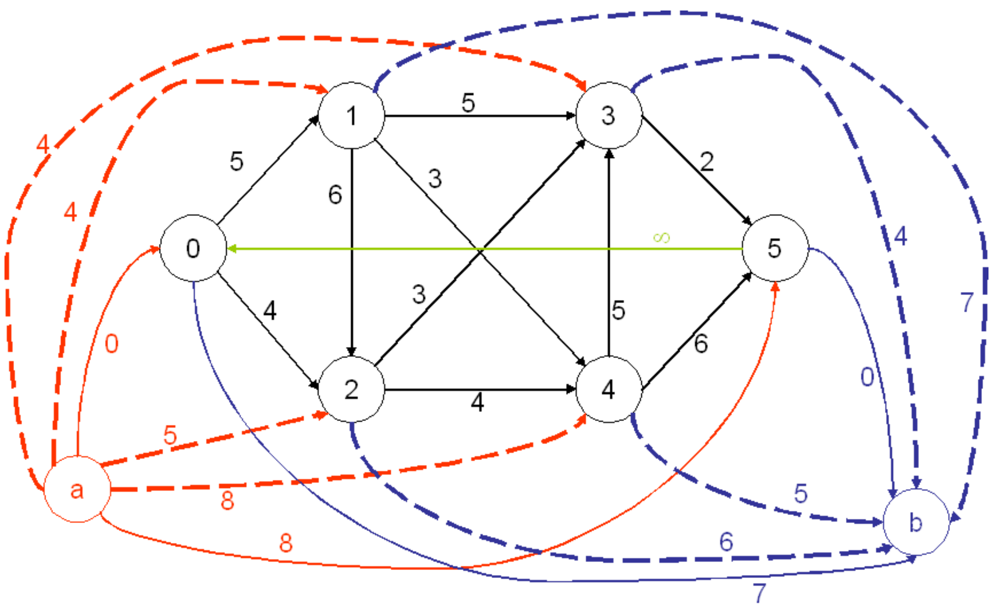
Iteración 1:
Tomemos C = a - 4 - b, vemos que $\varepsilon = 5$.
Entonces, $f_{a4} = f_{4b} = 5$, F=5.

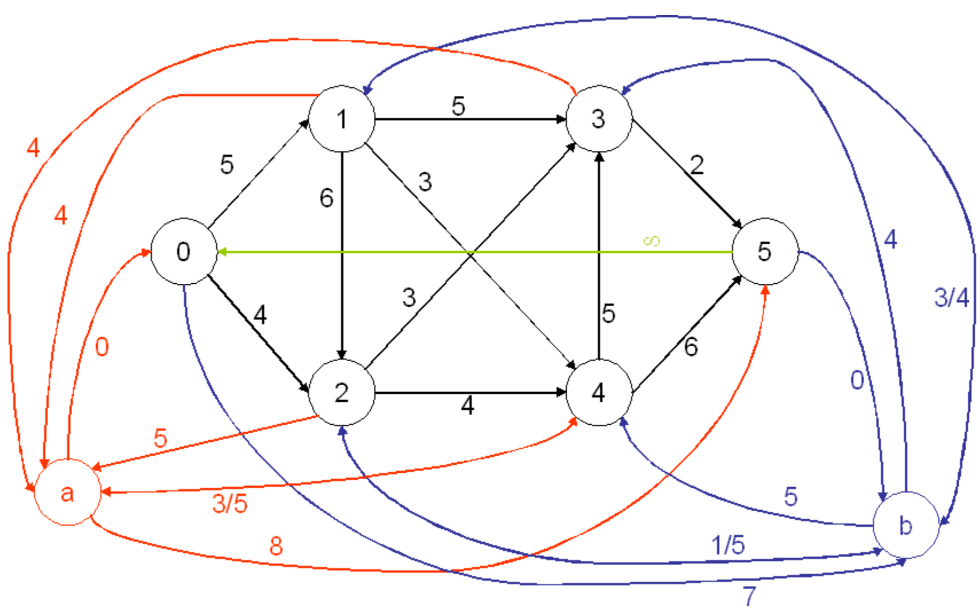
Iteración 2:
Tomemos C = a - 2 - b, vemos que $\varepsilon = 5$.
Entonces, $f_{a2} = f_{2b} = 5$, F=10.

Iteración 3:
Tomemos C = a - 1 - b, vemos que $\varepsilon = 4$.
Entonces, $f_{a1} = f_{1b} = 4$, F=14.

Iteración 4:
Tomemos C = a - 3 - b, vemos que $\varepsilon = 4$.
Entonces, $f_{a3} = f_{13} = 4$, F=18.

Las iteraciones anteriores están ilustradas en las siguientes figuras:



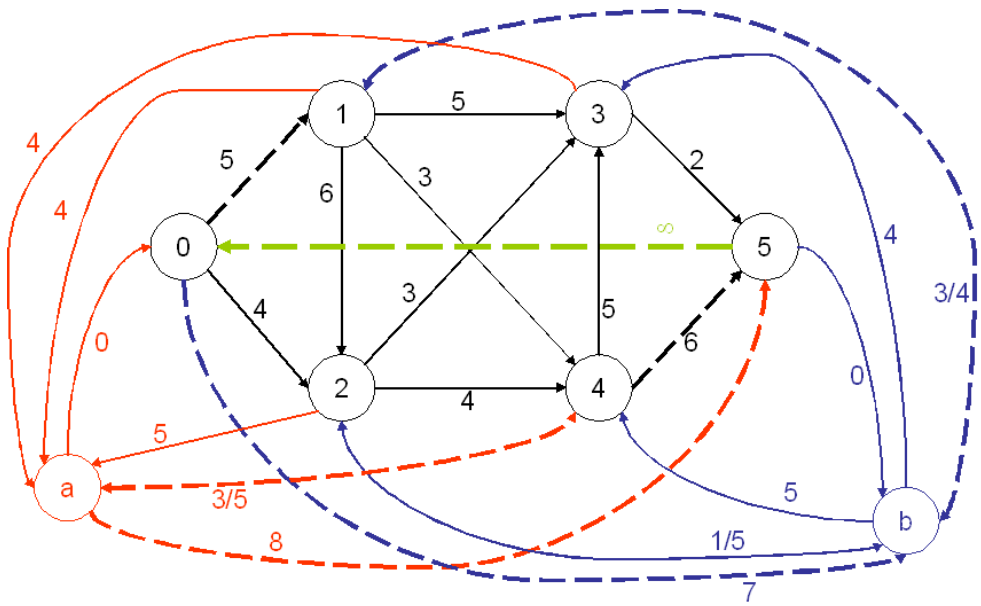


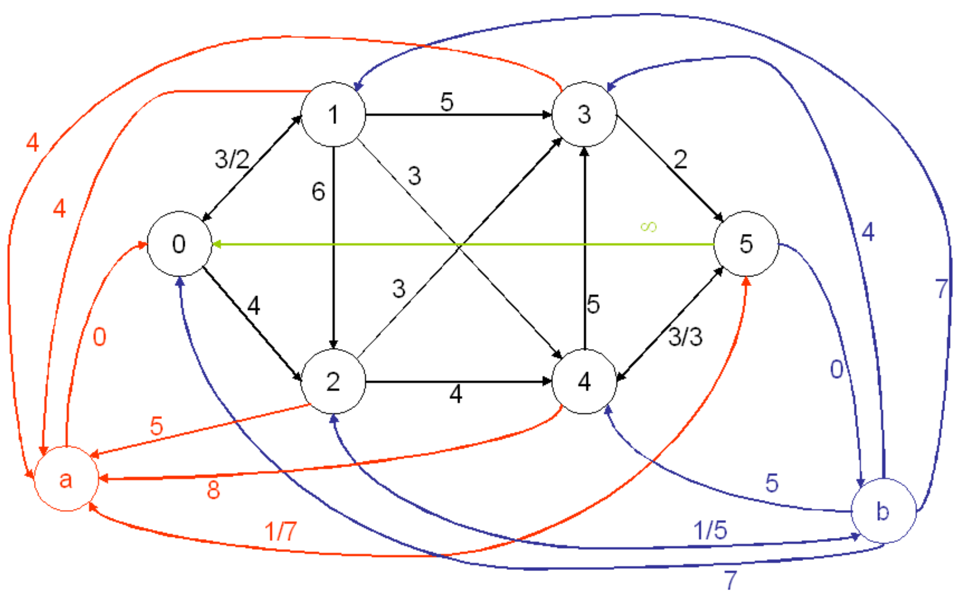
La figura anterior representa la situación después de las cuatro iteraciones anteriores. Sigamos iterando.

Iteración 5:
Tomemos C = a - 5 - 0 - b, vemos que $\varepsilon = 7$.
Entonces, $f_{a5} = f_{50} = f_{0b} = 7$, F=25.

Iteración 6:
Tomemos C = a - 4 - 5 - 0 - 1 - b, vemos que $\varepsilon = 3$.
Entonces, $f_{a4} = 8, f_{50} = 10, f_{1b} = 7, f_{45} = f_{01} = 3$, F=28.

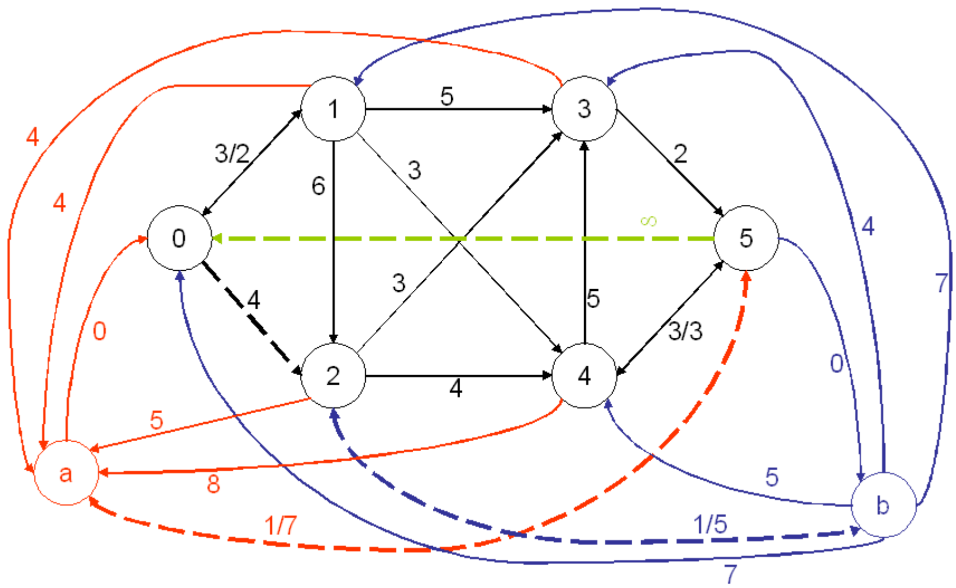
Las iteraciones anteriores están ilustradas en las siguientes figuras:

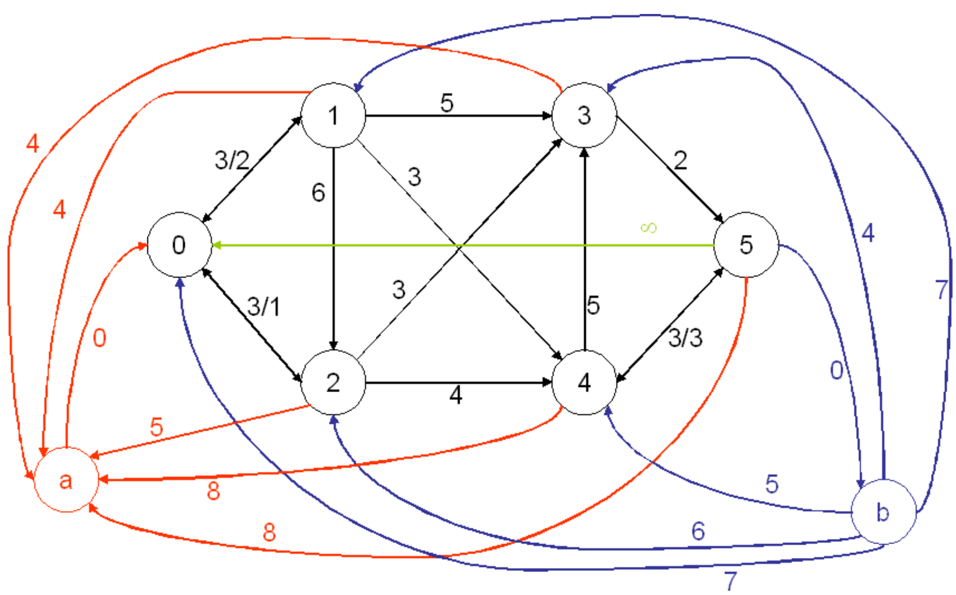




La figura anterior representa la situación después de las dos iteraciones anteriores. Sigamos iterando.

Iteración 7:
Tomemos C = a - 5 - 0 - 2 - b, vemos que $\varepsilon = 1$.
Entonces, $f_{a5} = 8, f_{50} = 11, f_{02} = 1, f_{2b} = 6$, F=29.



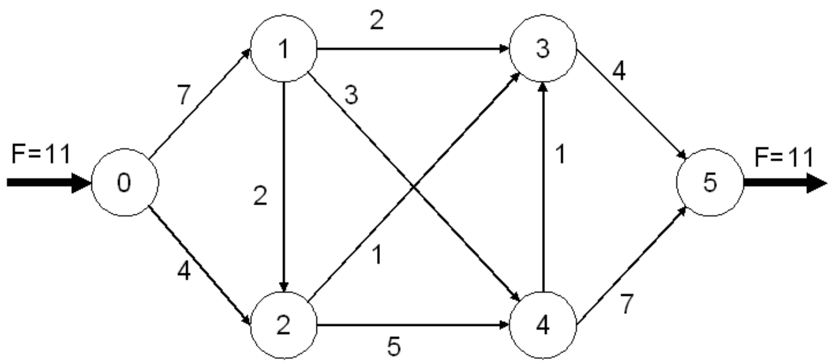


Podemos notar ya no existe otro camino, por lo que llegamos al óptimo, siendo $F^* = 29$.

3. En cualquier red se verifica que el flujo máximo es igual a la capacidad del corte de capacidad mínima. Luego, el corte mínimo es 29. Par encontrar todos los cortes de capacidad mínima en G', es necesario probar todos los cortes posibles y verificar que corresponda a la mínima capacidad. Por ejemplo, el corte $S = \{a\}$ y $\overline{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, b\}$ es de capcidad mínima. También verifica esta condición el corte $S = \{a, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\overline{S} = \{b\}$.

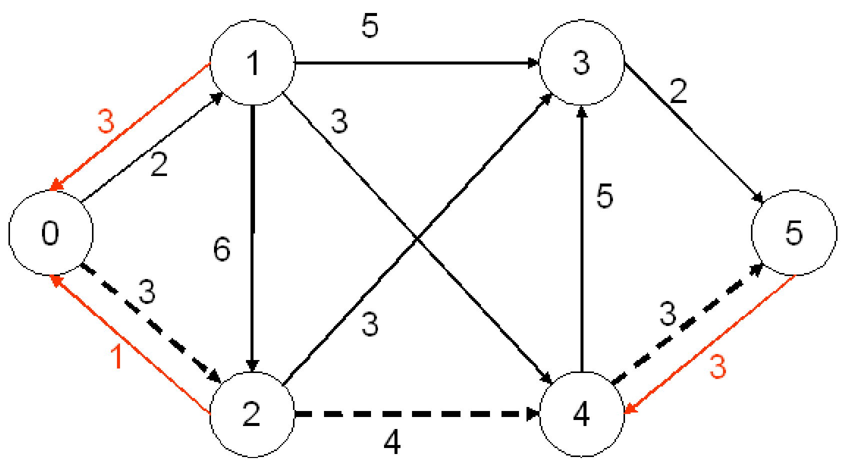
4. Para que exista flujo factible en G, se debe cumplir que $F^* = \sum_{(i,j)\in A} l_{ij}$, donde F^* es el flujo máximo en G'. Si se cumple lo anterior entonces el vector de flujos $f'_{ij} = f^*_{ij} + l_{ij}\ \forall (i,) \in A$, es un vector de flujo factible para G.

Luego, como $f^*_{01} = 3, f^*_{02} = 1, f^*_{45} = 3$ y $f^*_{50} = 11 = F'$. Entonces, el grafo G con el flujo factible inicial es el siguiente:

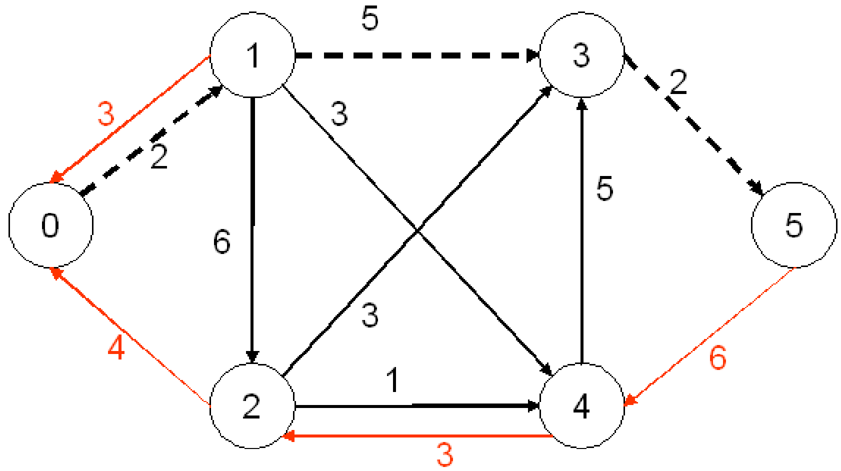


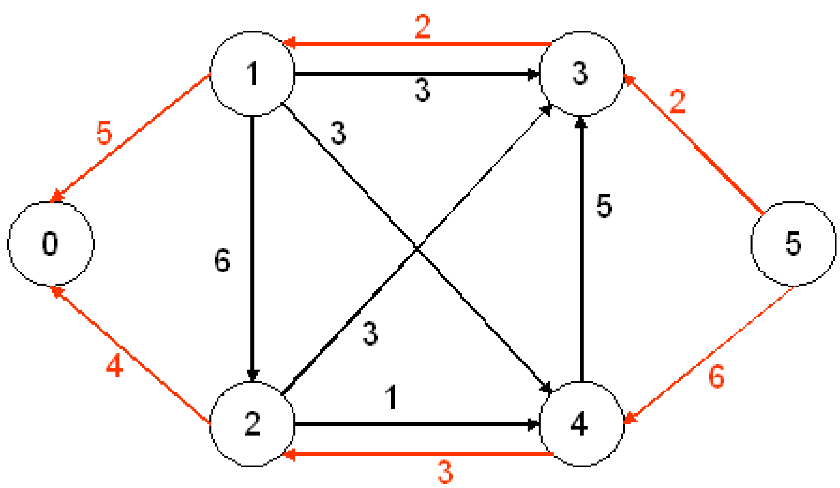
5. Como existe flujo factible en G, hallemos su flujo máximo usando Ford y Fulkerson:

   Iteración 1:
   Tomemos C = 0 - 2 - 4 - 5, vemos que $\varepsilon = 3$.
   Entonces, $f_{02} = 7, f_{24} = 8, f_{45} = 3$, F=14.



   Iteración 2:
   Tomemos C = 0 - 1 - 3 - 5, vemos que $\varepsilon = 2$.
   Entonces, $f_{01} = 9, f_{13} = 4, f_{35} = 6$, F=16.





Podemos notar ya no existe otro camino, por lo que llegamos al óptimo, siendo $F^* = 16$.

Pregunta 3

1. .

Variables de decisión (0.5 ptos)

x^s_{cdm} : 1 si cátedra de curso c se dicta en el día d módulo m en sala s, 0 si no.
w^s_{cdm} : 1 si auxiliar de curso c se dicta en el día d módulo m en sala s, 0 si no.

Restricciones

a) (0.5 ptos) Asignar a cátedra y auxiliar de curso c la cantidad de horarios necesarios.

$$\sum_d \sum_m \sum_s x^s_{cdm} = 2 \quad \forall c$$
$$\sum_d \sum_m \sum_s w^s_{cdm} = 1 \quad \forall c \tag{1}$$

b) (0.33 ptos) El curso c en el día d módulo m , tanto cátedra como auxiliar, puede ser asignado a lo más a una sala (restricción redundante con 3, pero debe quedar claro en la explicación que así es.)

$$\sum_{s}(x_{cdm}^{s}+w_{cdm}^{s})\leq 1 \quad \forall c,d,m \tag{2}$$

c) (0.5 ptos) Cursos de un mismo semestre deben tener horarios diferentes.

$$\sum_{c,c'\in Cur(t)|c\neq c'}\sum_{s}(x_{cdm}^{s}+w_{cdm}^{s}+x_{c'dm}^{s}+w_{c'dm}^{s})\leq 1 \quad \forall d,m,t \tag{3}$$

d) (0.33 ptos) En el día d el curso c puede tener a lo más un modulo asignado.

$$\sum_{m}\sum_{s}(x_{cdm}^{s}+w_{cdm}^{s})\leq 1 \quad \forall c,d \tag{4}$$

e) (0.33 ptos) A toda sala s en día d módulo m sólo se le puede asignar a lo más una cátedra o auxiliar.

$$\sum_{c}(x_{cdm}^{s}+w_{cdm}^{s})\leq 1 \quad \forall d,m,s \tag{5}$$

f) (0.5 ptos) La cátedra del curso c puede ser asignada en el día d módulo m y sala s si el profesor está disponible y la capacidad de la sala es suficiente (está restricción puede estar dividida en dos)

$$x_{cdm}^{s}\cdot na_{c}\leq ca_{s}\cdot disp_{cdm} \quad \forall c,d,m,s \tag{6}$$

g) (0.5 ptos) La auxiliar del curso c puede ser asignada en el día d módulo m y sala s si la capacidad de la sala es suficiente

$$w_{cdm}^{s}\cdot na_{c}\leq ca_{s} \quad \forall c,d,m,s \tag{7}$$

h) Naturaleza de las variables

$$x_{cdm}^{s},w_{cdm}^{s}\in\{0,1\} \quad \forall c,d,m,s \tag{8}$$

Función Objetivo (0.5 ptos) Minimizar clases de cátedra en la tarde.

$$\text{mín}\sum_{c}\sum_{d}\sum_{m=5}^{7}\sum_{s}x_{cdm}^{s} \tag{9}$$

2. Para modelar esto una forma es incorporar una nueva variable, una nueva restricción y cambiar la función objetivo:

Nueva Variables de decisión (0.5 ptos)

y_{cpmd} : 1 si cátedra o auxiliar de curso c y cátedra o auxiliar de curso p se dictan en el día d módulo m.

Nueva Restricción (0.75 ptos) Relación entre las variables x, w e y.

$$\sum_{s}(x_{cdm}^{s}+w_{cdm}^{s}+x_{pdm}^{s}+w_{pdm}^{s})\leq(1+y_{cpdm}) \quad \forall c,p,d,m \tag{10}$$

3. Naturaleza de las variable

$$y_{cpdm}\in\{0,1\} \quad \forall c,p,d,m \tag{11}$$

Función Objetivo (0.75 ptos) Minimizar topes de horario.

$$\min \sum_{c,p} \sum_{d,m} topes_{cp} \cdot y_{cpdm} \tag{12}$$

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl