



**Universidad de Chile.  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.  
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.  
IN34A Optimización**

**Profesores: Guillermo Durán.  
Richard Weber.  
Sebastián Souyris  
Auxiliares: Jaime Gacitúa.  
Ximena Schultz.  
Rodrigo Wolf.  
Leonardo López.**

## **Auxiliar N° 6 18 de Octubre de 2006**

### Problema 1 (Control 3 Otoño 99')

Sea  $X_1$  la solución del siguiente problema P1:

$$\begin{aligned} P1 \quad & \text{Min } z = c^T x \\ & \text{s.a. } Ax = b \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

El Problema anterior se puede aproximar mediante el siguiente problema relajado PR:

$$\begin{aligned} PR \quad & \text{Min } z = c^T x \\ & \text{s.a. } Ax = b \\ & x \in [0,1] \end{aligned}$$

Donde  $X_r$  es la solución al problema relajado.

¿Es posible asegurar que  $X_r = X_1$ ? Fundamente su respuesta.

R: El espacio de soluciones factibles de P1 es subconjunto del espacio de PR. Si la solución de PR es entera, se tendrá  $X_r = X_1$ , de lo contrario el óptimo de PR no estará contenido en el conjunto factible de P1, obteniéndose óptimos distintos.

### Problema 2 (CTP 3 Primavera 2005)

La empresa Máxima S .A., luego del fracaso de Pulschuper para encontrar a la famosa maleante Carmen San Diego, decidió despedirla, motivo por el cual Pulschuper debe abandonar la oficina y no volver nunca más.

El problema es que solo llevó una mochila pequeña con capacidad de 2lt. y en su estante tiene su laptop, una foto de su hija, su polerón favorito y un lápiz. Si los utensilios utilizan una capacidad de 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3 respectivamente y tienen utilidades de 8, 10, 5 y 1 respectivamente, utilice el algoritmo “*Branch & Bound*” para ayudar a Pulschuper a decidir qué utensilios llevarse a su casa.

Variables:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva notebook} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva poleron} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva foto} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_4 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva lapiz} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

$$1,2x_1 + 0,6x_2 + 0,8x_3 + 0,3x_4 \leq 2$$

Capacidad de la Mochila

Función Objetivo

$$\max \quad z = 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 + x_4$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots 4$$

Para obtener el óptimo del problema relajado, se calculan las razones beneficio/volumen:

$$\text{Laptop: } \frac{8}{1,2} = 6,67$$

$$\text{Polerón: } \frac{5}{0,8} = 6,25$$

$$\text{Foto: } \frac{10}{0,6} = 16,67$$

$$\text{Lápiz: } \frac{1}{0,3} = 3,33$$

Para obtener la solución se llena la mochila llenándola con los objetos que tienen mayor razón beneficio/costo hasta llenarla. La solución óptima del problema relajado queda

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0,25; x_4 = 0; Z_0 = 19,25$$

Ramificamos para  $x_3$ ,

$$\mathbf{x_3 = 1} \implies x_1=0,5; x_2=1; x_3=1, x_4=0; z_1=19$$

$$\mathbf{x_1 = 1} \implies x_1=1; x_2=0; x_3=1, x_4=0; z_2=13 \text{ Incumbente: } Z_2=13$$

$$\mathbf{x_1 = 0} \implies x_1=0; x_2=1; x_3=1, x_4=1; z_3=16 \text{ Incumbente: } Z_3=16$$

$$\mathbf{x_3=0} \implies x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=2/3; z_4=18,66$$

$$\mathbf{x_4 = 1} \implies x_1=11/12; x_2=1; x_3=0, x_4=1; z_5=18,33$$

$$\mathbf{x_1 = 1} \implies x_1=1; x_2=5/6; x_3=0, x_4=1; z_6=17,33$$

$$\mathbf{x_2 = 1} \implies \text{infactible}$$

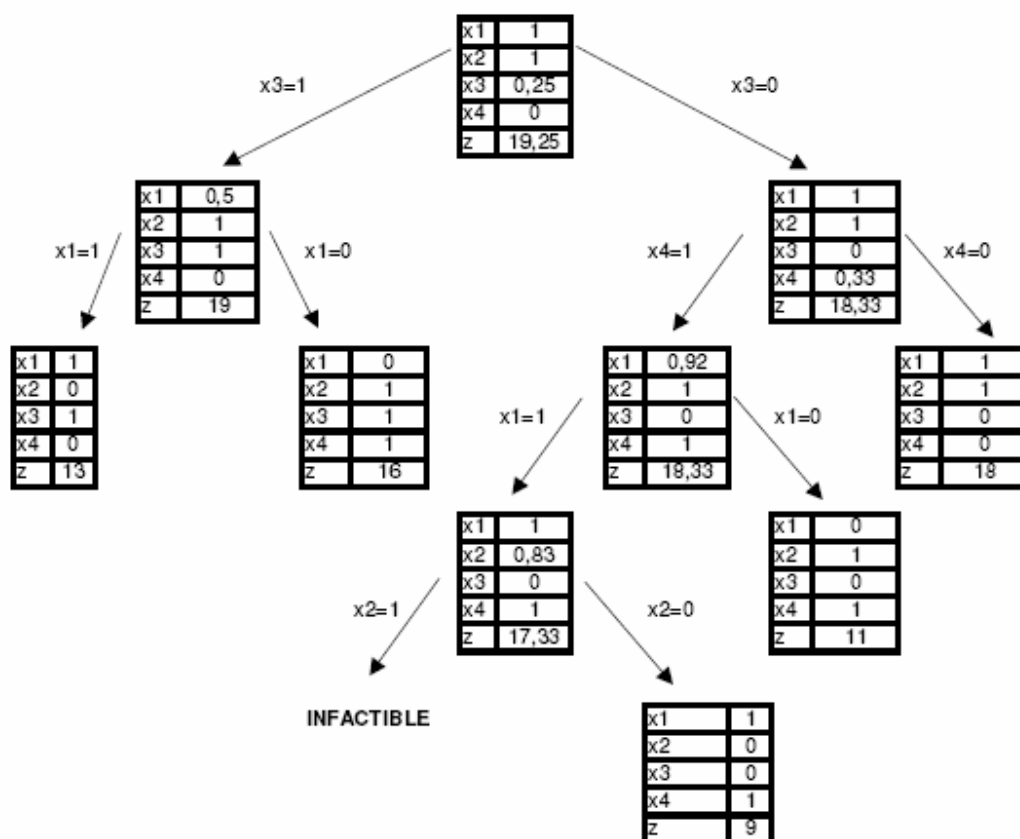
$$\mathbf{x_2 = 0} \implies x_1=1; x_2=0; x_3=0, x_4=1; z_7=9 \text{ Peor que el incumbente}$$

$$\mathbf{x_1 = 0} \implies x_1=0; x_2=1; x_3=0, x_4=1; z_8=11 \text{ Peor que el incumbente}$$

$$\mathbf{x_4 = 0} \implies x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=0; z_9=18 \text{ Incumbente: } Z_9=18$$

La solución óptima es

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = x_4 = 0; \quad z = 18$$



### Problema 3

Una compañía de automóviles quiere producir un nuevo modelo de auto en su línea de producción, la cual cuenta con una capacidad ociosa. Es te modelo puede producirse en dos tipos: BKN y NORMAL.

El auto BKN y el NORMAL le rentarán a la compañía una utilidad de 5 y 4 unidades monetarias respectivamente. El gerente de marketing sostiene que la demanda total por este modelo es de 5 unidades por día, como máximo. El gerente de recursos humanos afirma que se cuenta con 45 horas-hombre por día para dedicar a esta nueva línea productiva. Además en el departamento de operaciones se ha es timado que se requieren 10 horas-hombre por día para producir una unidad del modelo BKN y 6 horas-hombre por día para producir una unidad del modelo NORMAL.

- Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver el gerente de producción de la empresa
- Entregue la solución del problema desarrollando el algoritmo “Branch & Bound”.

Variables:

- $x_1$ : cantidad de autos BKN fabricados en el día  
 $x_2$ : cantidad de autos NORMAL fabricados en el día

Restricciones:

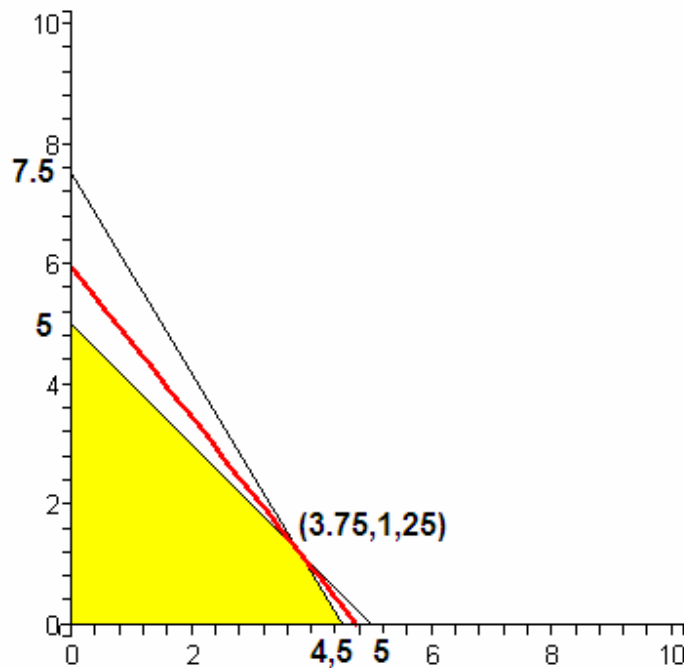
- $x_1 + x_2 \leq 5$  No exceder demanda  
 $10x_1 + 6x_2 \leq 45$  No exceder horas-hombre disponibles

Función Objetivo:

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



El óptimo está dado por la intersección de las restricciones, siendo ésta el punto (3.75, 1.25), obteniéndose  $Z_0=23.75$

Ramificación

$$x_1 \leq 3 \implies x_1=3, x_2=2, Z_1=23$$

*Incumbente:*  $Z_1=23$

$$x_1 \geq 4 \implies x_1=4, x_2=0.83, Z_2=23.33$$

$$x_2 \leq 0 \implies x_1=4.5, x_2=0, Z_3=22.5 < Z_1 \text{ no se sigue iterando}$$

$$x_2 \geq 1 \implies \text{infactible, se viola 2ª restricción}$$

Luego la solución óptima es:

$$(x_1, x_2) = (3, 2)$$

$$Z = 23$$

**Dudas y Consultas a**  
**Jaime Gacitúa** [jgacitua@ing.uchile.cl](mailto:jgacitua@ing.uchile.cl)