Pauta CTP #2 Primavera 2006

Sea el siguiente problema (P) de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
(P)\ Max \quad & z = x_1 + x_2 \\
s.a. \quad & \\
& 2x_2 - 3x_1 \le 6 \\
& x_2 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(a) Utilizando fase 1 de Simplex encuentre una base primal factible. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración. **(2ptos.)**

- **R:** Transformamos el problema a la forma canónica y agregamos variables artificiales:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad t_1 + t_2 \\
& s.a. \\
& -3x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 6 \\
& x_2 - x_4 + t_2 = 2 \\
& x_i \ge 0, t_j \ge 0 \quad \forall i = 1 \ldots 4,\ j = 1,2
\end{aligned}
$$

Comenzamos a iterar, la base inicial está asociada a las variables artificiales,
FASE I
<u>Iteración 1:</u>

$$B_1 = I_2 \; R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_1 = R_1$$

$$\bar{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } x_2$$

$$\min \left\{ \frac{6}{2} \quad \frac{2}{1} \right\} = 2 \Rightarrow \text{sale } t_2$$

<u>Iteración 2:</u>

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } x_4$$

$$\min \left\{ \frac{2}{2} \right\} = 1 \Rightarrow \text{sale } t_1$$

<u>Iteración 3:</u>

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.5 & -1.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_r^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ge 0$$

Terminamos fase 1, la base primal factible es B_3, asociada a x_4 y x_2.

(b) A partir de la base encontrada en (a) desarrolle fase 2 de Simplex. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración. ¿Qué sucede? Fundamente su conclusión a través de Simplex. **(2ptos.)**

- **R:** FASE 2

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\bar{c}_r^T = (-1.5 \quad -0.5) \Rightarrow \text{entra } x_1$

Pero $\bar{a}_{i1} < 0 \ \forall i = 1,2$.

Todos los coeficientes de x_1 en las restricciones son <= 0

x_1 puede crecer indefinidamente. **Problema no acotado.**

(c) Tome como base factible $(\bar{B})$ a las columnas asociadas a la variable x_2 y a la variable de holgura complementaria de la segunda restricción.

i. Compruebe que $\bar{B}$ efectivamente es base factible. **(0.5ptos.)**

- **R:** Tenemos $\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Se puede responder de las siguientes formas:

- Esta base fue el resultado de la fase I en el problema (a), por lo tanto es factible.
- Calcular

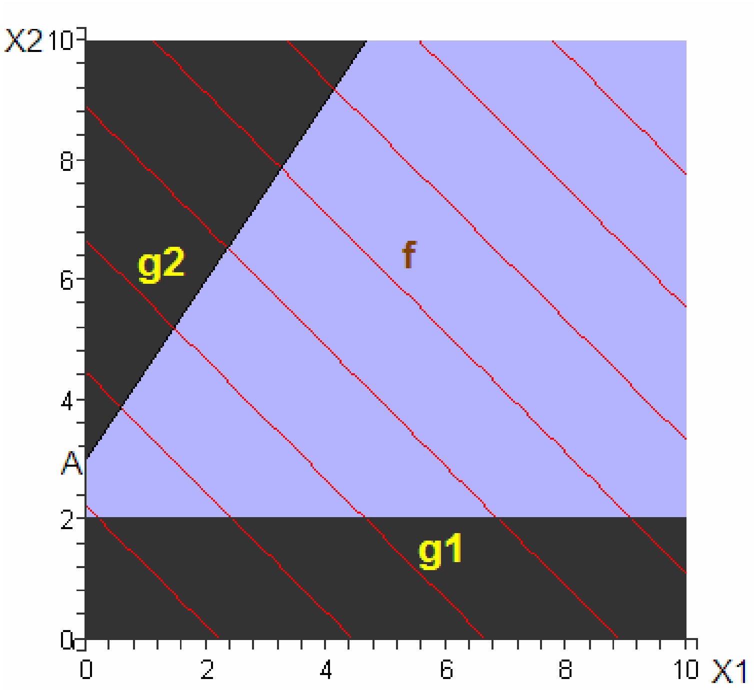
$$\bar{b} = \bar{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

⇨ estamos en un vértice factible.

- Se puede graficar el problema y mostrar que la base efectivamente corresponde a un vértice factible (ocupando la parte ii.)

ii. Realice un bosquejo del problema original (P), indicando restricciones y F.O. y señale a qué punto corresponde la base $\overline{B}$. **(1.5pto)**

- **R:** El conjunto factible esta en color claro, las curvas de nivel de f en rojo.



Para saber a que punto corresponde la base, debemos saber el valor de x_1 y x_2 en el vértice que esta asociado a $\overline{B}$.
Tenemos,

$$\overline{b} = \overline{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Por la primera restricción se deduce x_1=0. Por lo tanto el vértice es (x_1 x_2) = (0 3), representado en el bosquejo por la letra A.

Dudas y Preguntas a
Jaime Gacitúa, jgacitua@ing.uchile.cl