Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber, Sebastián Souyris
Auxiliares: Jaime Gacitúa, Leonardo López, Ximena Schultz, Rodrigo Wolf

Auxiliar N° 5

13 de septiembre de 2006

Problema 1

Sea el siguiente problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ s.a.\ A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde: $A \in R^{mxn}$ con $n \geq m$; $rg(A) = m$; $\vec{b} \in R^m$; $c, \vec{x} \in R^n$, y sea B una base primal factible.

a) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.

b) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique como se podría lograr la máxima variación.

c) ¿Cuándo se dice que una solución básica es degenerada?

d) Suponga que se ha resuelto (P), siendo su solución óptima única. Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

e) ¿Cómo sabe usted que una forma canónica entrega una solución básica no factible? Explique como resolvería usted un problema de programación lineal a partir de una forma básica no factible.

f) Suponga que usted dispone de una forma canónica que entrega una solución básica factible que no es óptima. Además usted conoce todos los costos modificados de la función objetivo en el óptimo. Explique cómo se pueden obtener los valores de las variables en la solución óptima a partir de la información anterior y sin tener que resolver el problema mediante una secuencia de iteraciones.

g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

h) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.

i) Comente la siguiente afirmación: "La Fase I del Algoritmo Simplex finaliza cuando todas las variables artificiales salen de la base".

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$
\begin{gathered}
\text{Máx } z = x_1 + x_2 + 3x_3 \\
s.a. \\
x_1 + x_3 \leq 2 \\
x_2 + x_3 \leq 2 \\
x_3 \geq 1 \\
x_i \geq 0
\end{gathered}
$$

a) Transforme el problema llevándolo a forma estándar.
b) Aplicando Fase I, determine una solución básica factible inicial.
c) Resuelva el problema utilizando Simplex.
d) Indique qué características presenta esta solución óptima:
    i. ¿Es el problema no acotado?
    ii. ¿Existen óptimos alternativos?
    iii. ¿Existen restricciones redundantes?
    iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

Problema 3

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$
\text{máx } z = 6x_1 + 4x_2
$$

$$
\begin{array}{llcr}
s.a & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resolverlo usando la forma canónica de Simplex.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Sebastián Souyris
Auxiliares: Jaime Gacitúa
Leonardo López
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar N° 5

13 de septiembre de 2006

Problema 1

a) El Algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de salida de la base.

En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es x_s, para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + \overline{a}_{is} \cdot x_s = \overline{b}_i \forall i = 1,\dots, m$$

Tomando en consideración las m restricciones el máximo valor que puede tomar x_s es:

$$\underset{\overline{a}_{is}>0}{mín}\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}\right\}$$

b) El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0. Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldría de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

$$\underset{\overline{a}_{is}>0}{mín}\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}\right\}$$

c) Es cuando un vértice esta sobredeterminado. Si rg(A) = n, un vértice esta sobredeterminado si es fruto de la intersección de n′ > n restricciones. Esta condición se verifica si existe algún x_B=0.

d) Suponga que x_j es variable no básica en la solución óptima. Si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor:

$$\min_{\overline{a}_{\bullet j}^{*}>0}\left\{\frac{\overline{b}_i^{\,*}}{\overline{a}_{ij}^{\,*}}\right\} = \frac{\overline{b}_p^{\,*}}{\overline{a}_{pj}^{\,*}}$$

Sea el costo modificado o reducido de xj en la última forma canónica. Luego al ingresar x_j a la base, la función objetivo aumentará en:

$$\overline{c}_j * \frac{\overline{b}_p *}{\overline{a}_{pj} *} \qquad (1)$$

Para toda variable no básica se debe obtener el resultado (1). El menor de estos resultados determinará la variable que ingresará a la base. La variable que sale de la base se determina con el procedimiento habitual del algoritmo Simplex.

Al ejecutar la iteración se obtendrá la solución básica factible pedida.

e) Si $\overline{b}_i < 0$ entonces la forma canónica entrega una solución básica no factible. Se debe agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego la fase 2.

f) Como se conocen los costos modificados de la F. O. en el óptimo se pueden identificar las variables no básicas en el óptimo y por tanto las variables básicas de la solución óptima.

Si se conocen las variables básicas en el óptimo se puede definir la matriz básica del óptimo. Luego se puede calcular:

$$\overline{b}* = B*^{-1}\, b$$

Donde el vector $\overline{b}*$ contiene el valor de las variables básicas en el óptimo.

g) Si, si estoy en una solución degenerada y la variable básica que vale 0 debería pasar a valores negativos si hiciéramos crecer la variable no básica correspondiente al costo reducido negativo.

En este caso, puedo entonces cambiar la base pero sin modificar la solución factible básica.

h) El problema de Fase I tiene la siguiente estructura:

$$Ax + It = b$$
$$x, t \geq 0$$

Donde $t \in R^m$, t variables artificiales.

Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. ($Ax = b$, $Ax + It = b$ con $t = 0$).

$$\text{Min } w = \Sigma\, t_i$$
$$Ax + It = b$$
$$b, x, t \geq 0$$

La solución básica factible inicial es $x = 0$ y $t = b$, $B = I$. Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial.

i) Falso. La fase I termina una vez que se encuentra el óptimo w* del problema auxiliar. Sin embargo, la base óptima puede contener variables auxiliares. Por ejemplo, si w*>0 el problema original es infactible y necesariamente al menos una de las variables auxiliares es básica.

Problema 2

a) Forma estándar:

$$\begin{gathered}\text{Min - } z = -x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0\end{gathered}$$

b) Para aplicar Fase I, se puede resolver alguno de los dos siguientes problemas:

$$\begin{gathered}\text{Min } t_1 + t_2 + t_3 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 + t_1 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 + t_2 = 2 \\ x_3 - x_6 + t_3 = 1 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0\end{gathered}$$

O bien, uno simplificado:

$$\begin{gathered}\text{Min } t_1 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_6 + t_1 = 1 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0\end{gathered}$$

Resolvamos este último problema:

__Iteración 1:__

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_4 & X_5 & t_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = I \Rightarrow \overline{b} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ t_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,0,0) - (0,0,1) \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\overline{c}_R = (0,0,-1,1)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_3 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet 3} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 3} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min\left\{ \overset{X_4}{\frac{2}{1}}, \overset{X_5}{\frac{2}{1}}, \overset{t_1}{\frac{1}{1}} \right\} = \min\{2,2,1\} = 1$$

Entonces, t_1 sale de la base.

Iteración 2:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_4 & X_5 & X_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,1,0) - (0,0,0)$$

$$\overline{c}_R = (0,0,1,0)$$

Solución óptima

Como la solución óptima nos indica que $t_1 = 0$, la suma óptima de variables artificiales es nula y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible para el problema original. Además, como ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces podemos tomar dicha base como vértice inicial para la fase II.

Luego, la base óptima de Fase I:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_4 & X_5 & X_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es una base primal factible para el problema original.

NOTA:

Si la suma óptima de variables artificiales es nula, pero existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.

Si la suma óptima de variables artificiales es no nula, significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.

c) **Iteración 1 (Fase II):**

De acuerdo a la parte b) partimos con la base factible:

$$B = (A4, A5, A3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r = (-1, -1, -3) \Rightarrow \text{Solución no es óptima por lo que entra } x_6$$

$$\bar{A}_{\bullet 6} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } \{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i6}}; \bar{a}_{i6} > 0\} = \text{Min}\{\frac{1}{1}; \frac{1}{1}\} = 1$$

En el criterio de salida hay empate. Luego, podemos predecir que encontraremos una solución degenerada. Escojamos X_4 como variable que sale de la base (podríamos escoger X_5 también).

Iteración 2 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A5, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r = (2, -1, 3) \Rightarrow \text{Solución no es óptima y sale } x_2$$

$$\bar{A}_{\bullet 2} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } \{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}; \bar{a}_{i2} > 0\} = \text{Min}\{\frac{0}{1}\} = 0 \Rightarrow \text{Sale } x_5$$

Iteración 3 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A2, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r = (1,1,2)$$

Luego, como todos los costos reducidos son mayores que cero, la solución es óptima. Entonces, en el óptimo las variables básicas valen: $X_6=1$; $X_2=0$; $X_3=2$ y las no básicas valen todas cero: $X_1=0$; $X_4=0$; $X_5=0$.

d)

i. ¿Es el problema no acotado?

El problema es acotado pues: -z*= -6 => z*=6

ii. ¿Existen óptimos alternativos?

No existen múltiples soluciones óptimas, pues $\bar{c}_R > 0$ en el óptimo, es decir, no existe ninguna variable no básica con costo reducido nulo.

iii. ¿Existen restricciones redundantes?

No existen restricciones redundantes. Además, ninguna restricción es una combinación lineal de las otras.

iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

La solución óptima es degenerada pues el vértice óptimo con cualquiera de sus bases posee una variable básica igual a cero.

Problema 3

Primero se debe llevar el problema planteado a la forma canónica (FC):

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ s.a. & \\ A\vec{x} &= \vec{b} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para ello, se deben agregar variables de holgura (x_3 y x_4) al problema original y transformarlo en un problema de minimización, quedando la FC como sigue:

$$\begin{aligned} \min z &= -6 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \\ s.a. & \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 10 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dado que no podemos formar una base factible inicial con vectores canónicos, recurrimos a simplex Fase I para encontrar una solución factible inicial, para ello definimos variables asociadas a cada restricción y una nueva función objetivo:

$$\text{mín } z = x_5 + x_6$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + x_5 & = & 10 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 + x_6 & = & 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

En este caso, las variables básicas son x_5, y x_6, siendo el resto no básicas.

Veamos si ésta solución es óptima. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. Calculemos:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 1:

- Criterio de entrada.

  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -3 y corresponde a la variable x_1, luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

  Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de $\bar{A}$ y de $\bar{b}$, para ello:

$$\begin{array}{rcl} \bar{A} & = & B^{-1}A \\ \bar{b} & = & B^{-1}b \end{array}$$

  En este caso se tiene que $B = I \mapsto B^{-1} = I$, luego:

$$\begin{array}{rcl} \bar{A} & = & B^{-1}A = A \\ \bar{b} & = & B^{-1}b = b \end{array}$$

  utilizando estos valores se tiene:

$$min_{a_{\bar{i}1}>0} \left\{ \frac{\vec{b}}{\vec{a_{i1}}} \right\} = \left\{ \frac{10}{1}, \frac{4}{2} \right\} = \{10, 2\} = 2 \mapsto x_6$$

  entonces x_6 sale de la base.

Iteración 2:

En este caso, las variables básicas son x_5, y x_1, siendo el resto no básicas.

Veamos si ésta solución es óptima.

Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R - c_B B^{-1} A$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. En este caso se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

- Criterio de entrada.

  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -1 y corresponde a la variable x_3, luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

  Entonces se tiene:

$$min_{\bar{a_{i3}}>0} \left\{ \frac{\bar{b}}{\vec{a_{i3}}} \right\} = \left\{ \frac{8}{1} \right\} = \{8\} = 8 \mapsto x_5$$

  entonces x_5 sale de la base.

Iteración 3:

En este caso, las variables básicas son x_3, y x_1, siendo el resto no básicas.

Veamos si ésta solución es óptima.

Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R - c_B B^{-1} A$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. En este caso se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \bar{b} &= B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución es óptima, entonces se debe empezar a iterar en fase II para encontrar la solución al problema original, para ello, simplemente volvemos a la función objetivo del problema estándar inicial y eliminamos las columnas de A asociadas a las variables x_5 y x_6.

Tenemos:

$$\min z = -6 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 10 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 1 (de fase II):

En este caso, las variables básicas son x_3, y x_1, siendo el resto no básicas.

Veamos si ésta solución es óptima.

Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R - c_B B^{-1} A$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. En este caso se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \bar{b} &= B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

- Criterio de entrada.

  Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -3 y corresponde a la variable x_4, luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

  Entonces se tiene:

  $$min_{\bar{a_{i4}}>0} \left\{ \frac{\bar{b}}{\bar{a_{i4}}} \right\} = \left\{ \frac{8}{\frac{1}{2}} \right\} = \{16\} = 16 \mapsto x_3$$

  entonces x_3 sale de la base.

Iteración 2 (de fase II):

En este caso, las variables básicas son x_3, y x_1, siendo el resto no básicas.

Veamos si ésta solución es óptima.

Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c_R} = c_R - c_B B^{-1} A$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. En este caso se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \bar{b} &= B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

utilizando estos valores se tiene:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución es óptima. El valor de las variables resulta ser:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 10 \\ x_2^* &= 0 \\ x_3^* &= 0 \\ x_4^* &= 6 \end{aligned}$$

por lo cual, el valor de la función objetivo inicial es $z^* = 60$.

Dudas o comentarios a:

lelopez@ing.uchile.cl