

La temperatura en un medio inhomogéneo satisface la ecuación de difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k(\vec{r}) \nabla T)$$

donde k es la conductividad térmica que, en general, depende de las coordenadas. En este problema se considera un cuerpo muy inhomogéneo (tal vez dos metales que comenzaban a mezclarse cuando se solidificaron), como dos materiales semiinfinitos con conductividades diferentes.

El sistema se idealiza como un sistema unidimensional, x es la coordenada perpendicular a la cara compartida, este cuerpo ocupa $0 \leq x \leq 1$ y la conductividad es la función $k(x) = \frac{3}{50} + \frac{1}{10\pi} \arctan(40(x - \frac{1}{2}))$. En los extremos $x = 0$ y $x = 1$ la temperatura es mantenida constante $T = T_0 = 1$. La condición inicial es que la temperatura es T_0 en todas partes excepto en la zona $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}$ donde vale $T = T_0 + 1$. Debe encontrar la evolución $T(x, t)$.

Divida $[0, 1]$ en unos mil trazos iguales y obtenga y dibuje $T(x, t)$ para $t = 0.0$, $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3$, $t = 0.4$ y $t = 0.5$. Las curvas se verán mejor todas juntas. Se le pide resolver esto utilizando dos métodos de integración diferentes.

P1 Utilice el método explícito (debe estar listo para el día 23). Puede ser interesante que compare lo que se obtiene con distintos valores de ε .

P2 Utilice el método de Crank-Nicolson y escoja $dt = \varepsilon$ con valores que para el método explícito serían inaceptables, tal como $\varepsilon = 5h^2$. Esto último es importante porque subraya la estabilidad del método de integración de Crank-Nicolson.

Haga una tabla de los valores que T toma en $(x = \frac{1}{2}, t = 1)$ cuando se usa $dt = \varepsilon = \mathcal{N} h^2$ para $\mathcal{N} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Para obtener el valor justo en $t = 1$ tal vez necesite interpolar entre dos valores muy cercanos en torno a $t = 1$.