TAREA 10
MECÁNICA CUÁNTICA II
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Viernes 3 de Noviembre, 2006

Profesor: Fernando Lund.
Auxiliar: Simón Poblete.
Entrega Viernes 10 de Noviembre.

1. Considere un sistema de tres niveles no degenerado, de tal forma que $E_3 - E_2 \ll E_2 - E_1$, al cual se le aplica un campo magnético oscilante de frecuencia ω. Suponga que los estados 2 y 3 son de la misma paridad, de manera que el campo magnético $W(t)$ no mezcla los estados 2 y 3 con el priemro. En esta base, la perturbación queda representada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_1 \sin\omega t \\ 0 & \hbar\omega_1 \sin\omega t & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde ω_1 es una constante de proporcionalidad relacionada a la amplitud del campo oscilante.

a) Si

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^{3} b_i(t) e^{-1E_i t/\hbar} |\varphi_i\rangle \tag{2}$$

escriba las ecuaciones diferenciales satisfechas por los coeficinetes $b_i(t)$.

b) Suponga que ω es muy parecido a $\omega_{32} = (E_3 - E_2)/\hbar$. Integre el sistema con las condiciones iniciales

$$b_1(0) = b_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b_3(0) = 0$$

Desprecie en las ecuaciones los términos que varían mucho, proporcionales a $e^{\pm i(\omega+\omega_{32})t}$ y considere solo los términos constantes o que varíen lentamente, proporcionales a $e^{\pm i(\omega-\omega_{32})t}$.

c) La componente D_z del momento dipolar eléctrico del sistema está representada, en la base d elos tres estados, por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde d es una constante real (D_z es un operador impar y solo puede conectar estados de paridaes distintas). Calcule $\langle D_z\rangle(t) = \langle\psi(t)|D_z|\psi(t)\rangle$, usnado el vector $|psi(t)\rangle$ calculado en la parte anterior. Muestre que el tiempo de evolución de $\langle D_z\rangle(t)$ está dado por un asuperposición de términos sinusoidales. Determine las frecuencias ν_k y las intensidades relativas π_k de estos términos.

Estas son las frecuencias que pueden ser absorbidas por un átomo cuando es expuesto a un campo eléctrico oscilante en el eje z. Describa las modificaciones de este espectro de absorción cuando, para ω fijo e igual a ω_{32}, ω_1 es incrementado desde cero. Muestre que la presencia de un campo magnético oscilando a la frecuencia ω_{32} desdobla la línea de absorción del dipolo eléctrico a la frecuencia ω_{21}, y que la separación de los dos componentes del doblete es proporcional a la amplitud del campo magnético oscilante (doblete de Autler-Townes). ¿Qué pasa si , para ω_1 fijo, $\omega - \omega_{32}$ varía?

2. Considere, en una dimensión, una partícula de masa m, en un potencial de la forma $V(x) = -\alpha\delta(x)$, donde α es una constante real y positiva. Es sabido que para cada valor positivo de la energía, hay dos funciones de onda estacionarias, correspondientes a una partícula incidente desde la izquierda o la derecha. Para la primera autofunción, por ejemplo, se tiene

$$\chi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{ikx} - \frac{1}{1+i\hbar^2k/m\alpha}e^{-ikx}\right] & para x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\hbar^2k/m\alpha}{1+i\hbar^2k/m\alpha}e^{ikx} & para x > 0 \end{cases}$$

a) Muestre que $\chi_k(x)$ satisface la relación de ortonormalización

$$\langle\chi_k|\chi_{k'}\rangle = \delta(k-k')$$

Puede utilizar

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} e^{iqx}dx &= \int_{0}^{\infty} e^{-iqx}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon + iq} \\ &= \pi\delta(q) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{q}\right) \end{aligned}$$

Calcule la densidad de estados para una energía E.

b) Calcule el elemento matricial $\langle\chi_k|X|\varphi_0\rangle$ del operador posición X entre el estado ligado $|\varphi_0\rangle$ y el estado libre propuesto más arriba.

c) La partícula, de carga q, interactúa con un campo eléctrico oscilante de frecuencia ω. La perturbación resulta ser

$$W(t) = -qEX\sin\omega t$$

La partícula está inicialmente en el estado base. Suponga que $\hbar\omega > -E_0$. Calcule la probabilidad de transición w por unidad de tiempo a un estado de energía positiva arbitraria(efecto fotoeléctrico). ¿Cómo varía w con ω y E?