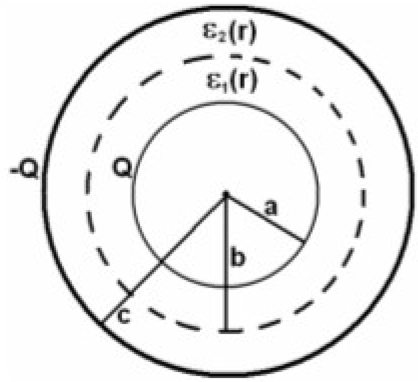
Pauta P1



Las suposiciones gaussianas son que los campos apuntan sólo en la dirección radial, y dependen de la componente radial. Es decir

$$\vec{D}(r,\theta,\phi)=D(r)\hat{r}$$

a) hay cuatro zonas.

i) $r<a$ No hay carga libre encerrada (se concentra en la superficie).

$$\boxed{\vec{D}_1=\vec{E}_1=\vec{P}_1=\vec{0}}$$

ii) $a<r<b$ La carga encerrada es Q, por lo que la ley de Gauss queda como

$$\oiint_S \vec{D}_2\cdot\vec{dS}=D_2(r)4\pi r^2=Q_{enc} \quad \boxed{\Rightarrow D_2(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}}$$

$$\boxed{E_2(r)=\frac{D_2(r)}{\epsilon_1(r)}=\frac{Q b^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}} \ , \ \boxed{P_2=D_2-\epsilon_0 E_2=\frac{Q}{4\pi r^2}(1-\frac{b^2}{r^2})}$$

iii) $b<r<c$ La carga libre encerrada es exactamente la misma, por lo que el campo desplazamiento eléctrico es el mismo. También se podría argumentar usando la condición de borde para las componentes normales del vector desplazamiento.

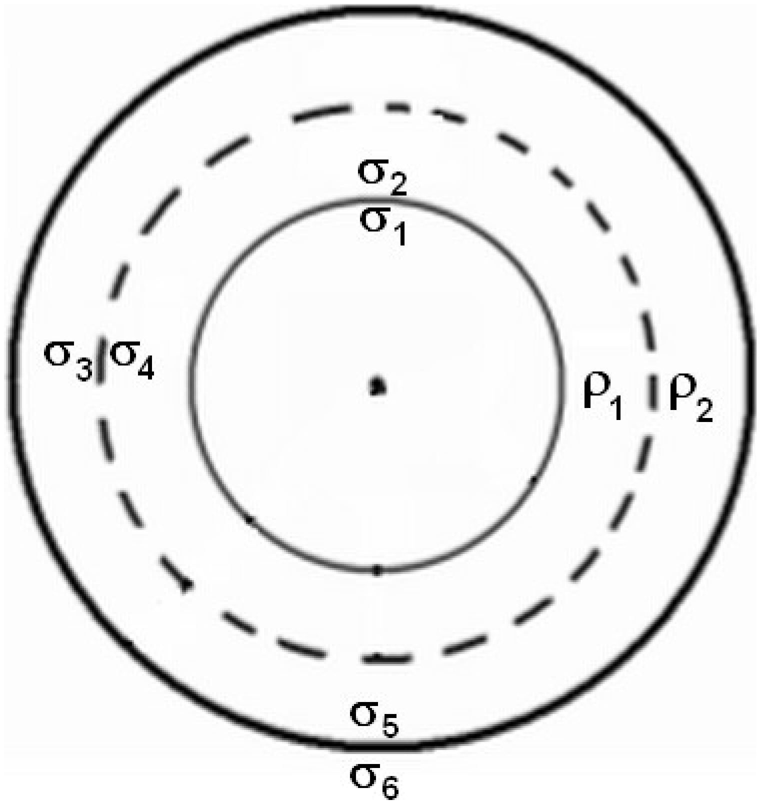
$$\boxed{\Rightarrow D_3(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}}$$

$$\boxed{E_3(r)=\frac{D_3(r)}{\epsilon_2(r)}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c r}} \ , \ \boxed{P_3=D_3-\epsilon_0 E_3=\frac{Q}{4\pi r^2}(1-\frac{r}{c})}$$

iv) $r>c$ La carga libre encerrada es $Q+(-Q)=0$, por lo que los tres campos valen cero.

$$\boxed{\vec{D}_2=\vec{E}_2=\vec{P}_2=\vec{0}}$$

b) Los lugares donde podría existir cargas de polarización son las siguientes.



Donde $\boxed{\sigma_1=\sigma_6=0}$, pues no existe dieléctrico. Ahora, se calculan las densidades superficiales de carga de polarización.

$\sigma_i=\vec{P}\cdot\hat{n}_i$, donde $\hat{n}_i$ corresponde a la normal **exterior** a la superficie. Todos los vectores Polarización apuntan en dirección radial $\hat{r}$

$$\boxed{\sigma_2=\vec{P}_2\cdot(-\hat{r})\|_{r=a}=-\frac{Q}{4\pi a^2}(1-\frac{b^2}{a^2})}$$

$$\boxed{\sigma_4=\vec{P}_2\cdot\hat{r}\|_{r=b}=0}$$

$$\boxed{\sigma_3=\vec{P}_3\cdot(-\hat{r})\|_{r=b}=-\frac{Q}{4\pi b^2}(1-\frac{b}{c})}$$

$$\boxed{\sigma_5=\vec{P}_3\cdot\hat{r}\|_{r=c}=0}$$

Las densidades volumétricas de Polarización valen

$$\rho_i(r)=-\nabla\cdot\vec{P}_i=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2P_i(r))$$

De esta manera, se encuentra que

$$\boxed{\rho_1(r) = -\frac{Q b^2}{2\pi r^5}} \quad , \quad \boxed{\rho_2(r) = \frac{Q}{4\pi c r}}$$

Ahora, la carga total de polarización es la suma de las contribuciones de todas las densidades de carga de polarización encontradas. De esta manera, la carga total de polarización vale

$$Q_P = Q_{\sigma_1} + Q_{\sigma_2} + Q_{\sigma_3} + Q_{\sigma_4} + Q_{\sigma_5} + Q_{\sigma_6} + Q_{\rho_1} + Q_{\rho_1}$$

pero $Q_{\sigma_1} = Q_{\sigma_4} + Q_{\sigma_5} + Q_{\sigma_6} = 0$, por lo que

$$Q_P = \sigma_2 S(r=a) + \sigma_3 S(r=b) + \iiint_{(ii)} \rho_1(r)\, dV + \iiint_{(iii)} \rho_2(r)\, dV$$

$$Q_P = -\frac{Q}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) 4\pi a^2 - \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{b}{c}\right) 4\pi b^2 + 2 Q b^2 \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2a^2}\right) + \frac{Q(c-b)}{c}$$

$$\boxed{Q_P = 0}$$