1 Cuerda Bosónica

1.1 Simetrías de la acción y coordenadas tipo luz

Recordemos que, como alternativa a la acción de Nambu-Goto, usamos la acción de Polyakov que es completamente equivalente.

$$I = -T \int \sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \eta_{\mu\nu} d^2\xi$$

Donde γ_{ij} es la métrica (bidimensional) inducida en la hoja de mundo (worldsheet) de la cuerda y $x^\mu(\xi)$ es la posición de la cuerda. Sus ecuaciones de movimiento son:

$$\partial^i \partial_i x^\mu = 0$$

$$T_{ij} = \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\gamma^{ab}\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \eta_{\mu\nu} = 0$$

Las simetrías que dejan invariante la accion son tres:

Poincaré: $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ donde Λ es una matriz de Lorentz y a es un vector constante

Difeomorfismos en el worldsheet (cambio de coordenadas): $\xi_i \rightarrow \xi'_i(\xi_i)$

Weyl: $\gamma_{ij} \rightarrow \Omega(\xi_i)\gamma_{ij}$ donde Ω es una función arbitraria

Haciendo uso de un cambio de coordenadas y la simetría de Weyl podemos dejar (localmente) la métrica de worldsheet como $ds^2 = -d\tau + d\sigma$, donde τ y σ son los nombres que daremos a las coordenadas del worldsheet.

Así la ecuación de movimiento se escribe como una simple ecuación de onda

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0$$

y la otra ecuación, a la que llamaremos restricción (constraint) queda

$$T_{11} = 0 \iff T_{00} = 0,\ T_{01} = T_{10} = 0$$

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + x'^\mu x'_\mu = 0,\ \dot{x}^\mu x'_\mu = 0 \iff (\dot{x}^\mu \pm x'^\mu)^2 = 0$$

Introducimos las coordenadas tipo luz (light cone coordinates), que serán útiles más adelante

$$\xi_\pm = \tau \pm \sigma \Rightarrow ds^2 = -d\xi_+ d\xi_-$$

En estas coordenadas

$$I = 4T \int \partial_+ x^\mu \partial_- x^\nu \eta_{\mu\nu} d^2\xi$$

$$\partial_+ \partial_- x^\mu = 0$$

$$T_{\pm\pm} = \frac{1}{2}\partial_\pm x^\mu \partial_\pm x^\mu,\ T_{+-} = 0$$

Notar que $\partial_- T_{++} = 0$ y $\partial_+ T_{--} = 0$, por las ecuaciones de movimiento

1.2 Condiciones de borde y expansión en osciladores

Podemos tener dos tipos de condiciones de borde para una cuerda abierta:

Neumann: $\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = 0$ en los bordes (que los fijamos en $\sigma = 0, \pi$)
Dirichlet: $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = 0$ en los bordes

usamos el ansatz típico para la ecuación de ondas clásica

$$x^\mu = x_R^\mu(\tau - \sigma) + x_L^\mu(\tau + \sigma)$$

y expandimos cada solución en modos de Fourier (osciladores) más una constante y una parte lineal. Lo escribimos de una forma particular, sin perder ninguna generalidad, pero que servirá para simplificar los cálculos más adelante

$$x_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{1}{2\pi T}p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$x_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{1}{2\pi T}\tilde{p}^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

donde x_0, p^μ, α_n^μ son ctes. complejas

La primera condición que debemos pedir es que x^μ sea real, es decir, $(x^\mu)^* = x^\mu$, esto nos da las siguientes condiciones sobre las constantes

$$x_0^\mu, p^\mu, \tilde{p}^\mu \in \mathbb{R} \quad (\alpha_n^\mu)^* = (\alpha_n^\mu)^\dagger = \alpha_{-n}^\mu \quad (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu$$

Notar que sugerentemente hemos denotado el complejo conjugado como el hermítico de α (lo que coincide cuando α se trata de un número). Esto tendrá mucha relevancia a la hora de cuantizar la teoría.