

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 21 de septiembre de 2006

Índice general

V. RELATIVIDAD ESPECIAL: DINÁMICA	3
V.1. Dinámica Relativista.	3
V.1.1. Ley de Transformaciones de Vectores.	3
V.1.2. La Cuadrivelocidad.	6
V.1.3. El cuadrimomentum	10
V.1.4. La Conservación del Momentum.	11
V.1.5. Principio Variacional.	19
V.2. El Fotón	21
V.3. Confirmación experimental de la relatividad especial	23
V.3.1. Resumen	27
V.3.2. Transformación de un elemento de 4-Volumen	28
V.3.3. Las Ecuaciones de Maxwell	30

Capítulo V

RELATIVIDAD ESPECIAL: DINÁMICA

V.1. Dinámica Relativista.

En esta sección definiremos la velocidad en 4 dimensiones y a partir de ella el momentum. Justificaremos la expresión obtenida para el 4-momentum recurriendo al Principio Variacional usado para obtener las ecuaciones de movimiento en la mecánica de Newton.

De forma análoga a la cuadri-velocidad definiremos la cuadri-aceleración y con ella la segunda Ley de Newton. Esto nos lleva a la dinámica de una partícula. La principal aplicación de este método son los choques elásticos y las leyes de conservación. Una consecuencia interesante es que la masa total deja de ser una cantidad conservada en relatividad especial. Esto marca una diferencia con lo que acontece en el esquema de Newton.

Introduciremos el concepto de invariante, una cantidad que toma el mismo valor en cualquier sistema de referencia inercial. A partir del invariante asociado al momentum emergerá la fórmula emblemática de la relatividad especial de Einstein: $E = m c^2$.

Las expresiones relativistas siempre deben tener como caso límite la forma usual de la mecánica de Newton cuando las velocidades de las partículas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

V.1.1. Ley de Transformaciones de Vectores.

Las cantidades que tienen un significado físico -aquellas que representan una medición-, transforman de acuerdo a su naturaleza al ir de un sistema de referencia inercial a otro. Por

ejemplo, la fuerza, la velocidad...etc. cambian de la misma forma, un escalar como la temperatura no altera su valor pero se lo asocia a la coordenada del nuevo sistema de referencia $T(x,y,z,t)=T'(x',y',z',t')$.

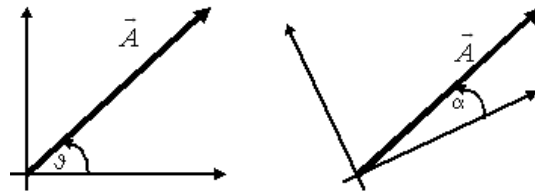


Figura V.1: En mecánica utilizamos cantidades como: escalares, vectores, pseudo-vectores, tensores...etc. El nombre de cada uno de estos objetos responde a las propiedades de transformación que obedece dicha cantidad al realizar una rotación del sistema de referencia o al reflejarlo en un espejo

Por ejemplo, la segunda ley de Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ es válida en un sistema inercial y no se especifica, por ejemplo, la orientación que debe adoptar el sistema de referencia en el espacio. Nosotros seleccionamos un sistema de referencia, el más conveniente, y escribimos las ecuaciones en él. Si posteriormente queremos cambiar a otro sistema de referencia, uno que forme un cierto ángulo con respecto a un eje del anterior, debemos usar las propiedades de transformación de los vectores, la indicada en la Figura. De esta forma la ecuación adopta la forma asociada al nuevo sistema de referencia. Para que esta operación siga describiendo la misma física, todas las cantidades que aparecen en la ecuación, fuerzas y aceleraciones deben transformar en forma equivalente. Todos los objetos que obedecen dicha ley de transformación se llaman **vectores**. las ecuaciones físicas entonces igualan vectores con vectores, pseudo vectores con pseudo vectores, tensores con sus similares..., de otra forma estas ecuaciones se podrían referir sólo a un único sistema de referencia. Así habría sido imposible encontrar una ley en la naturaleza.

Ejemplo

Estudiemos el caso de una rotación en un ángulo θ . Para preparar el camino a las transformaciones de Lorentz, incluiremos aquí el tiempo.

- a) Escribir la rotación en forma matricial, incluyendo el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct, \\ x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y \cos \theta - x \sin \theta, \\ z \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial,

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 R^\mu_\nu x^\nu. \quad (\text{V.1})$$

Hemos introducido la matriz de rotación R^μ_ν . Esta matriz incluye la componente temporal, los índices μ y ν toman los valores 0, 1, 2 y 3. Es una matriz de 4×4 .

Convención de Einstein

A continuación se define la convención de Einstein para las sumas. Consiste en omitir el símbolo de la sumatoria \sum y adoptar la convención siguiente: cada vez que aparezca un índice repetido, se debe sumar sobre todos los valores que toma dicho índice. En esta notación la expresión anterior se escribe

$$\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \quad (\text{V.2})$$

donde la matriz R^μ_ν tiene la siguiente forma

$$R^\mu_\nu = \begin{bmatrix} R^0_0 & R^0_1 & R^0_2 & R^0_3 \\ R^1_0 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ R^2_0 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ R^3_0 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Las velocidades deben transformar de la misma forma. Usando la forma tensorial definida en [V.1.1], y diferenciando con respecto a x^ν (y manteniendo fijo el ángulo de rotación) tenemos que

$$\Delta \vec{x} \equiv \vec{X}_p - \vec{X}_q, \quad d\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{V.3})$$

de aquí podemos encontrar la forma de la velocidad recordando que t toma el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Sólo debemos dividir ambos miembros de la ecuación anterior por dt :

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = R^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad \bar{V}^\mu = R^\mu_\nu V^\nu. \quad (\text{V.4})$$

Es claro que esta expresión transforma igual que los vectores bajo una rotación, y por lo tanto es un vector.

Podemos seguir con este método y aplicarlo a la aceleración, y obtener un resultado similar: también es un vector, como uno supone.

V.1.2. La Cuadrivelocidad.

Lo que nos interesa ahora es aplicar este método a la velocidad en relatividad especial. Las transformaciones de interés, en este caso, son las transformaciones de Lorentz. Para que un objeto de 4 componentes sea cuadvectores, debe transformar igual que las coordenadas x^μ al efectuar un cambio de sistema de referencia, puesto que nos interesa que las leyes físicas tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales. Queremos escribir las leyes en forma covariante; que tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales.

Al intentar resolver un problema específico, seleccionamos el sistema de referencia que juzgamos más adecuado, y sabemos que las leyes tienen la misma expresión formal en ese sistema como en cualquier otro inercial.

Si queremos cambiar de sistema de referencia, usamos las transformaciones de Lorentz, puesto que todas las cantidades usadas deben ser cuadvectores y por lo tanto obedecen la misma ley de transformación.

Entonces:

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{V.5})$$

donde Λ es la matriz que representa a la transformación de Lorentz.

$$\begin{bmatrix} d\bar{ct} \\ d\bar{x} \\ d\bar{y} \\ d\bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\,ct \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

¿Cómo definimos la cuadrivelocidad? Si ya sabemos que Δx^μ transforma como un cuadvectores, tal como en la definición anterior, entonces para definir la cuadrivelocidad debemos dividir esta cantidad por un *invariante*: una cantidad que tenga el mismo valor en ambos sistemas de referencia inerciales, en analogía con lo realizado en la mecánica Newtoniana.

Ya conocemos una cantidad, que cumple con esta propiedad: precisamente el elemento de longitud en 4 dimensiones.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Figura V.2:

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, definida junto con la transformación de Lorentz en una dimensión espacial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Como $ds' = ds$, podemos dividir ambos lados de la ecuación y obtener la cuadvirvelocidad:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (\text{V.6})$$

Las propiedades de transformación de u^μ son las esperadas

$$\bar{u}^\mu \equiv \frac{d\bar{x}^\mu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (\text{V.7})$$

Si una partícula permanece en reposo en el sistema de referencia que estamos usando entonces $d\vec{x} = 0$. y u^μ toma la siguiente forma (escrita en forma horizontal para ahorrar espacio)

$$u^\mu = \left[\frac{cdt}{cdt}, 0, 0, 0 \right] = [1, 0, 0, 0].$$

Ahora, si la partícula se desplaza en el sistema de referencia que estamos usando, entonces podemos factorizar el tiempo a partir de la expresión de ds^2 , para que la cuadvirvelocidad se asemeje lo más posible a la expresión usual de la velocidad.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 \left[1 - [dx/(cdt)]^2 \right], \quad (\text{V.8})$$

pero dx/dt es la velocidad de la partícula con respecto al sistema de referencia elegido en la dirección x . Análogamente con el resto de las coordenadas, de forma que la expresión anterior se transforma en:

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 [1 - \vec{v}^2/c^2], \quad (\text{V.9})$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula. Tomando la componente positiva de la raíz cuadrada de esta expresión y recordando la definición de β y γ podemos escribir la cuadrivelocidad de la siguiente forma:

$$u^\mu = [\gamma, \vec{\beta}\gamma]. \quad (\text{V.10})$$

Note que la expresión obtenida no tiene dimensiones.

Receta para subir y bajar Índices

Los índices superiores identifican a un vector u^μ (o tensor si hay más de un índice $F^{\mu\nu}$) *contravariante*. Si figura como subíndice u_μ , se denomina *covariante*.

Cada una de estas cantidades tiene un significado geométrico bien determinado pero aquí sólo nos interesa dar una receta que nos indique cómo subir o bajar índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene exactamente la misma expresión de la métrica de Minkowski.

Para subir un índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la métrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ análogamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La métrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) índices.

Ejemplo

Encuentre la expresión asociada a la transformación de Lorentz, con los dos índices arriba (dos veces contravariante) o los dos índices abajo (dos veces covariante).

La Transformación de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tiene un índice superior y uno inferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el índice α . Análogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Clasificación de los cuadri-vectores

Dados dos cuadvectores cualquiera A^{μ} y B^{ν} , mediante la métrica de Minkowski podemos definir un número a partir de ellos, de la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \equiv A^{\mu} B_{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}$$

La expresión a la derecha de la ecuación es un número, puesto que proviene de la suma de cada una de las componentes.

El caso más interesante es aquel en el cual usamos el mismo vector dos veces:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = A^0 A^0 - A^1 A^1 - A^2 A^2 - A^3 A^3 \equiv A^{\mu} A_{\mu} \equiv A_{\mu} A^{\mu}$$

Ahora, mediante esta operación podemos asociar un número a este vector:

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **tiempo**}$$

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **luz**}$$

$$\text{Si } A_{\mu} A^{\mu} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **espacio**}$$

De esta forma podemos clasificar a los cuadvectores; puesto que el signo y el valor de esta cantidad $A_{\mu} A^{\mu}$, es un invariante: vale lo mismo en todos los sistema inerciales.

El significado físico de esta cantidad es el siguiente: si un cuadvector es *tipo tiempo*, indica que es un vector que está contenido dentro del cono de luz. Por ejemplo si el cuadvector representa a la quadri velocidad de una partícula, ésta se desplaza con velocidades menores que la velocidad de la luz. En cualquier otro sistema de referencia inercial, se cumple la misma condición.

Si la partícula es *tipo luz*, el vector se apoya en el manto del cono de luz. Finalmente si el vector es *tipo espacio*, indica que el vector se ubica fuera del cono de luz.

La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadriaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadrivelocidad, tenemos:

$$u^\mu u_\mu = +1. \quad (\text{V.11})$$

De aquí derivando con respecto a ds :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{V.12})$$

Definiendo la cuadriaceleración $a^\mu \equiv \frac{d u^\mu}{d s}$, y en forma similar a_μ ,

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{V.13})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{V.14})$$

Ejercicio

Encontrar la expresión de a^μ como función de γ , $\vec{\beta}$ y $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

V.1.3. El cuadrimomentum

Usando los resultados de la sección anterior, podemos definir el cuadrimomentum P^μ , como

$$P^\mu = \left(\frac{m_o c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, m_o c \gamma \vec{\beta} \right) = m_o c (\gamma, \gamma \vec{\beta}), \quad (\text{V.15})$$

introduciendo la expresión de u^μ ,

$$P^\mu = m_o c u^\mu. \quad (\text{V.16})$$

Como u^μ es un cuadvivector, P^μ también lo es.

El factor $(m_o c)$ aparece por razones dimensionales, el cuadvivector u^μ , no tiene dimensiones. La primera componente del cuadvivector momentum P^μ se define como la energía asociada a la partícula. Las otras tres componentes constituyen el vector moméntum, es decir, éstas son las

componentes que en un régimen no relativista se transformarán en el momentum usual de la mecánica Newtoniana.

Mencionamos que los invariantes son importantes puesto que toman el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas. Calculemos el invariante obtenido a partir del cuadrimomentum.

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{\mathbf{P}} \right) \quad (\text{V.17})$$

$$P^\mu P_\mu = (m_o c)^2 u^\mu u_\mu = (m_o c)^2 \quad (\text{V.18})$$

$$P^\mu P_\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{\mathbf{P}}^2 = m_o^2 c^2 \quad (\text{V.19})$$

En un sistema en que la partícula se encuentre en reposo, $\vec{\mathbf{P}} = 0$, y por lo tanto la energía toma el valor conocido

$$E = m_o c^2 \quad (\text{V.20})$$

Otra consecuencia de este cálculo es que la definición de masa en reposo está bien definida: es proporcional al valor del invariante $P^\mu P_\mu$, por lo tanto es un número que no depende del sistema de referencia utilizado.

V.1.4. La Conservación del Momentum.

Continuando con la generalización de las cantidades que aparecen en la mecánica usual de Newton, nos queda por definir la cuadrifuerza. Se define a partir del cuadrimomentum en la forma que se indica a continuación:

$$F^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{ds}. \quad (\text{V.21})$$

Si no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema de partículas que estamos estudiando, entonces $F^\mu = 0$ y en un choque entre partículas ocurre que

$$P_{Total}^\mu = \text{Constante}. \quad (\text{V.22})$$

Como el cuadrimomentum se conserva, cada una de sus componentes se conserva, toma el mismo valor antes y después del choque.

$$P_{\text{antes}}^o = P_{\text{después}}^o \rightarrow \text{la energía se conserva.} \quad (\text{V.23})$$

$$\vec{P}_{\text{antes}} = \vec{P}_{\text{después}} \rightarrow \text{el momento se conserva.} \quad (\text{V.24})$$

Una de las consecuencias de la conservación del 4 - momento p^μ es que la masa y la energía no sean independientes como ocurría en la mecánica de Newton. La ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la energía se vuelven una sola en el contexto de la Relatividad Especial.

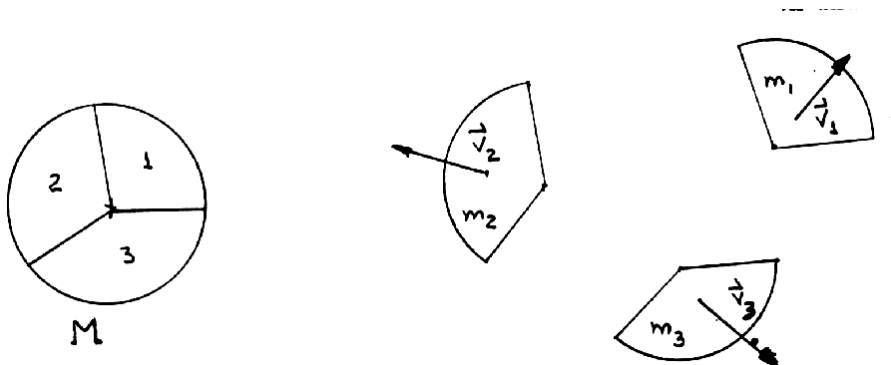


Figura V.3: En la mecánica de Newton ocurre que: $M = m_1 + m_2 + m_3$, $p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ y $E_i = E_f$, $E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$. Estas 5 ecuaciones se transforman en 4 ecuaciones en la relatividad especial.

En relatividad Especial las ecuaciones son cuatro:

$$\begin{aligned} P_{\text{inic}}^o &= P_{\text{final}}^o & (\text{conservación de masa y energía}) \\ \vec{P}_{\text{inic}} &= \vec{P}_{\text{final}} & (3 \text{ ecuación, conservación del momentum}) \end{aligned}$$

Transformación de masa en energía

Supongamos que una masa M , inicialmente en reposo se divide en dos partículas idénticas.

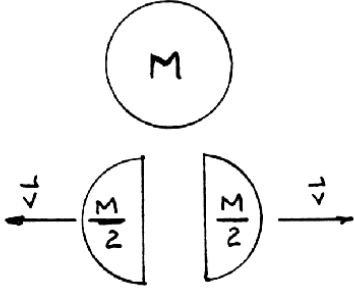
Utilizando el invariante

$$P_{\mu}^{\text{inic}} P_{\text{inic}}^{\mu} = P_{\mu}^{\text{fin}} P_{\text{fin}}^{\mu}$$

tenemos

$$P_{\text{inicial}}^{\mu} = \{M c, \vec{0}\}$$

$$P_{\text{final}}^{\mu} = \{(m_1 + m_2) c \gamma, \gamma m_1 \vec{v}_1 - \gamma m_2 \vec{v}_2\}$$



Si ambos trozos 1 y 2 son idénticos $m_1 = m_2$, entonces

$$P_{\text{final}}^{\mu} = \{2m c \gamma, \vec{0}\}, \quad \text{puesto que } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0. \text{ Además}$$

$$P_{\text{inic}}^{\mu} P_{\mu}^{\text{inic}} = M^2 c^2 = m^2 c^2 \gamma^2 = P_{\text{final}}^{\mu} P_{\mu}^{\text{final}}$$

De aquí tenemos

$$M = 2m \gamma, \quad \text{como } \gamma \geq 1,$$

entonces $M > 2m$. La masa no se conserva. Parte de la masa inicial se transformó en energía. Con el objeto de hacer una analogía con la mecánica de Newton, afirmamos que la masa se convirtió en energía cinética. Definimos la energía cinética como:

$$T \equiv E - E_o, \quad (\text{V.25})$$

donde E_o proviene del invariante $P^{\mu} P_{\mu}$

$$P^{\mu} P_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_o^2}{c^2}, \quad \text{con } p = \gamma m v.$$

$$E = \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2}$$

$$T \equiv \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2} - E_o.$$

Otra forma que puede adoptar este resultado, se obtiene desarrollando γ en serie de potencias de $(v/c)^2$:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2 \\
 T &= m c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 \mp \dots \right\} - m c^2 \\
 T &\equiv \text{Energía Cinética Relativista} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3m}{8} \left(\frac{v^4}{c^2} \right) \mp \dots
 \end{aligned}$$

Este es el valor de la energía cinética para cada partícula m . Para comparar con el valor inicial M

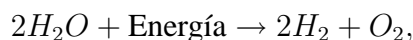
$$2T = 2m\gamma c^2 - 2mc^2 = (M - 2m)c^2,$$

la diferencia de masa se transformó en energía cinética.

La ley de conservación de masa de Lavoisier no es exacta. Claro está que la diferencia entre la masa inicial y final es, en la mayoría de los casos, despreciable.

La energía se transforma en masa

En la reacción



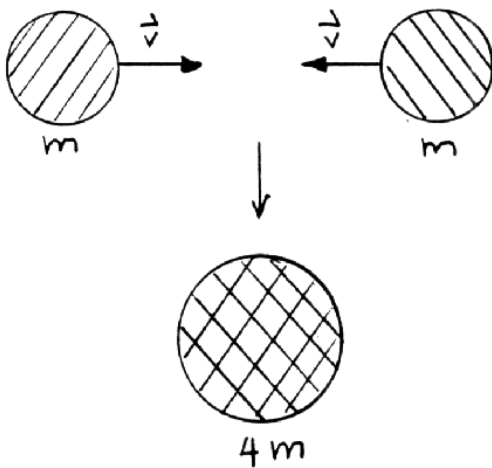
la energía añadida al agua se convierte en masa. En 1000 toneladas de agua convertida a hidrógeno y oxígeno, estos productos gaseosos tienen alrededor de 0,3 gramos de masa en exceso del original.

Ejemplo

- Suponga que dos masas iguales chocan frontalmente para producir una sola partícula de masa en reposo $4m$.
- El mismo caso anterior, pero ahora una de las partículas está en reposo en el Laboratorio y la otra choca frontalmente. Calcule la energía de la partícula incidente.

a) Utilicemos los invariantes

$$\begin{aligned}
 P_{in}^\mu P_{\mu}^{in} &= P_{fin}^\mu P_{\mu}^{fin} \\
 P_{in}^\mu &= \left(2 \frac{E_i}{c}, P_1 + P_2 \right), \\
 \text{pero } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= 0, \text{ luego :} \\
 \frac{2E_i^2}{c^2} &= \frac{E_f^2}{c^2} \\
 E_i &= m \gamma \\
 E_f &= 4m \\
 2m\gamma &= 4m \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,87c
 \end{aligned}$$



Ambas partículas deben aproximarse con la velocidad $v = 0,87c$

b) En el segundo caso, la partícula de masa $4m$ no puede estar en reposo, de esta forma

$$\left(\frac{E_1}{c} + mc \right)^2 - P_1^2 = \left(\frac{E_f}{c} \right)^2 - P_f^2$$

como $P_1 = \gamma mv$, $E_1 = mc\gamma$, entonces

$$(mc)^2(\gamma_i + 1)^2 - \gamma_i^2 m^2 v^2 = (4\gamma_f mc)^2 - (4m\gamma_f v_f)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{v_i}{c})^2}}, \quad \gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{v_f}{c})^2}}$$

$$(mc)^2 + 2(mc)^2\gamma_i + \gamma_i^2 m^2 c^2 (1 - \frac{v_i^2}{c^2}) = 16\gamma_f^2 m^2 c^2 (1 - \frac{v_f^2}{c^2})$$

$$2(mc)^2(1 + \gamma_i) = 16m^1c^2, \quad \text{de aquí se obtiene} \quad \gamma_i = 7, \quad \Rightarrow \quad v_i \simeq 0,99 c.$$

En este caso, bombardear una partícula contra un blanco en reposo, se necesita una cantidad apreciablemente mayor de energía que el caso anterior. Es por esta razón que los aceleradores modernos utilizan haces de partículas que chocan frontalmente para producir como partículas más masivas.

Por ejemplo, el descubrimiento del bosón Z , que era una predicción de la teoría de Weinberg, Salam y Glashow y que les valió el premio Nobel en 1979, tiene una masa mil veces mayor que la de un átomo.

La partícula Z se produce en los aceleradores a partir del choque de dos partículas y la masa de la partícula Z es 100.000 veces mayor que la masa de cada una de las partículas incidentes.

Esta partícula fue detectada en Enero de 1983. Para tener una idea de la magnitud del acelerador, éste contiene un magneto de 800 toneladas para producir un campo magnético de 0.7 Tesla.

Ejemplo

Considere la reacción

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

En el Sist. de Lab. $\vec{P}_2 = 0$

En el Sist. Centro de Momemtum: $\vec{P}_1^{C.M.} + \vec{P}_2^{CM} = 0$

Demuestre que:

$$(a) \quad E_{\text{Total}}^{C.M.} = c^2 (m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 E_1}{c^2})^{1/2}$$

$$(b) \quad E_1^{CM} = c^4 [\frac{E_{C.M.}^2}{c^4 \text{total}} + m_1^2 - m_2^2] / 2 E_T^{C.M.}$$

$$(c) \quad P_1^{CM} = \frac{m_2 c^2 P_1^{C.M.}}{E_T}$$

$$(d) \quad \gamma_{C.M.} = (E_1 + m_2 c^2) / E_{\text{Total}}^{C.M.}$$

$$\gamma_{C.M.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{C.M.}^2}{c^2}}} \quad v_{C.M.} \equiv v_{C.M.} \quad \text{con respecto al sist. Lab.}$$

$$(e) \quad v_{C.M.} = \frac{P_1}{\left(\frac{E_1}{c^2} + m_2\right)}$$

$$A) \quad P_{CM}^\mu = \left[\frac{E_T^{C.M.}}{c^2}, \vec{0} \right] \quad P^{CM} \equiv \tilde{P}$$

$$\tilde{P}^\mu \tilde{P}_\mu = -\frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} = (P_1^\mu + P_2^\mu)(P_{1\mu} + P_{2\mu})$$

en S. Lab.

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= \left(\frac{E_1}{c^2}, \vec{P}_1 \right) \\ P_2^\mu &= \left(\frac{E_2}{c^2}, 0 \right) \quad (\text{def.}) \end{aligned}$$

$$(P_1^\mu + P_2^\mu)(P_{1\mu} + P_{2\mu}) =$$

$$= P_1^\mu P_{1\mu} + P_2^\mu P_{2\mu} + 2P_1^\mu P_{\mu 2}$$

$$= \underbrace{-\frac{E_1^2}{c^4} + \vec{P}_1^2}_{-m_1^2} - 2m_2 \frac{E_1}{c^2}$$

$$-m_1^2 - m_2^2 - 2m_2 \frac{E_1}{c^2} = -\frac{\tilde{E}_T^2}{c^4}$$

$$\tilde{E}_T = c^2 [m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{E_1 m_2}{c^2}]^{1/2}$$

Uso de los invariantes

$$b) \quad \tilde{P}_1^\mu (\tilde{P}_{\mu 1} + \tilde{P}_{\mu 2}) = \tilde{P}_1^\mu \tilde{P}_{\mu 1} + \tilde{P}_1^\mu \tilde{P}_{\mu 2}$$

$$-\frac{\tilde{E}_1}{c^2}(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) = -m_1^2 c^2 - E_1 m_2$$

$$-\frac{\tilde{E}_1 \tilde{E}_T}{c^4} = -m_1^2 - \frac{E_1 m_2}{c^2}$$

De la parte

$$\frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} - m_1^2 - m_2^2 = \frac{2 E_1 m_2}{c^2}$$

$$\frac{\tilde{E}_1 \tilde{E}_T}{c^4} = m_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} - m_1^2 - m_2^2 \right) \not\approx^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_T^2}{c^4} + \frac{1}{2} m_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{2} \tilde{E}_T + \frac{c^4}{2 \tilde{E}_T} (m_1^2 - m_2^2)$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{2} \frac{c^4}{\tilde{E}_T} (\tilde{E}_T^2 + m_1^2 - m_2^2)$$

$$(c) P_1^{CM} = \frac{m_2 c^2 P_1}{E_T^{CM}}$$

$$-\frac{\tilde{E}_1^2}{c^4} + \tilde{P}_1^2 = -m_1^2$$

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{\tilde{E}_1^2}{c^4} - m_1^2 = \frac{(m_1^2 c^2 + m_2 E_1)^2}{\not\approx^2} \frac{\not\approx^4}{\tilde{E}_T^2} \cdot -m_1^2$$

Donde se ha usado un resultado de la sección anterior.

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{m_1^4 c^4 + m_2^2 E_1^2 + 2 m_1^2 m_2 E_1 c^2 - m_1^2 \tilde{E}_T^2}{\tilde{E}_T^2}$$

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{m_1^4 c^4 + m_2^2 E_1^2 + 2 m_1^2 m_2 E_1 c^2 - m_1^4 c^4 m_1^2 m_2^2 - \frac{2 m_2 m_1^2 E_1}{c^2}}{\tilde{E}_T^2}$$

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{m_2 c^2}{\tilde{E}_T^2} \left(\frac{m_2 E_1^2}{c^2} + 2 \cancel{m_1^2 E_1} - m_1^2 m_2 - 2 \cancel{m_1^2 E_1} \right)$$

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{m_2^2 c^2}{\tilde{E}_T^2} (E_1^2 - m_1^2) = \frac{m_2^2 \vec{p}_1^2}{\tilde{E}_T^2}$$

(d) $\gamma_{CM} = ?$

$$\begin{aligned} P_{\text{Total}}^\mu &= P_1^\mu + P_2^\mu \\ &= (E_{\text{Total}}, \vec{P}_1 + \vec{0}) \end{aligned}$$

$$P_{CM}^\mu = (E_{CM}, \vec{0})$$

$$P_{\text{Total}}^0 = \gamma (P_{CM}^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{P}_{CM}^0)$$

$$\gamma_{CM} = \frac{E_{\text{Total}}}{E_{CM}} = \frac{\frac{E_1}{c^2} + m_2}{\frac{E_{CM}}{c^2}}$$

$$\gamma_{CM} = \frac{E_1 + m_2 c^2}{E_{\text{Total}}^{CM}}$$

V.1.5. Principio Variacional.

Encontraremos el momentum usando cálculo variacional, porque de allí calculando el Hamiltoniano encontraremos la expresión relativista de la energía.

$$S = \alpha \int L dt, \quad (\text{V.26})$$

S es la acción y L es el Lagrangiano. La cantidad $L dt$ deber ser un *invariante relativista*, porque de esta forma, a través de este método, encontramos una ecuación de movimiento independiente del sistema de referencia (o mejor válida en cualquiera de ellos).

El invariante más simple es ds .

$$\begin{aligned}
S &= \alpha \int ds = \alpha \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}, \\
&= \alpha c \int dt \sqrt{1 - \beta^2}, \\
&\simeq \alpha c \int dt (1 - \frac{1}{2} \beta^2), \quad \text{si } \beta^2 \ll 1.
\end{aligned}$$

El objetivo de tomar la aproximación $\beta^2 \ll 1$ es determinar el valor de la constante α introducida al comienzo del cálculo a partir del límite no-relativista. Como este límite la fórmula relativista debe coincidir con la usual en mecánica, procedemos a ajustar la constante α para que el lagrangiano tome la expresión: $L = T - V$. En nuestro caso $V = 0$, puesto que no hay fuerzas. De este modo:

$$ds = \alpha c dt - \frac{\alpha}{2} \frac{v^2}{c} dt \Rightarrow \alpha = -m_o c,$$

m_o se define como la masa de la partícula medida en un sistema en reposo con respecto a ella. La acción es:

$$S = -m_o c^2 \int dt + \int \frac{m_o v^2}{2} dt \quad (\text{V.27})$$

el primer término $-m_o c^2 \int dt$ no afecta las ecuaciones de movimiento por ser una constante: se cancela al tomar la variación del Lagrangiano con extremos fijos.

Se introdujo una constante m_o , que llamaremos $m_o \equiv$ masa en reposo de la partícula.

$$\begin{aligned}
S &= \int (-m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}) dt \\
L &= L(v)
\end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos definir, en forma canónica, el momento asociado a una partícula.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{P}} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} \\
\vec{\mathbf{P}} &= \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} = m_o \gamma \vec{v}
\end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

La componente temporal del 4-vector momentum, P^0 , se define a partir del Hamiltoniano.

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$H = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

El hamiltoniano H representa la **energía** total de la partícula, como puede comprobarse en el caso no-relativista. Definimos la energía $E = H$

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{V.30})$$

En la siguiente sección definimos el cuádrimomentum.

Note que, de acuerdo a lo establecido al comienzo de esta sección de cuádrivectores, son las propiedades de transformación las que determinan cuando un cuádrivector está bien definido o no. Si la asociación que *definimos* aquí es compatible con las transformaciones de Lorentz entonces está correcta.

V.2. El Fotón

Definimos al fotón como una partícula sin masa. De acuerdo al invariante $p^\mu p_\mu = m_o^2 c^2$ tenemos que $\vec{p} = p^o = E/c$.

Además imponemos la condición que su energía sea:

$$E \equiv \hbar \omega, \quad (\text{V.31})$$

donde \hbar es una constante universal cuyo origen explicaremos después. \hbar es el signo inequívoco de la presencia de la mecánica cuántica en las consideraciones del problema. En este caso, es una definición la cual nosotros pondremos a prueba para saber si es coherente con los datos experimentales y con las definiciones anteriores.

Como aparece la frecuencia ω en la definición, lo primero que debemos hacer es comprobar la compatibilidad de esta definición con la ley de transformaciones de la frecuencia entre dos Sistemas Inerciales en movimiento relativo proveniente de la relatividad especial. Sabemos que:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

Usando las Transformaciones de Lorentz:

$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$E = \hbar \omega \quad E' = \hbar \omega'$$

$$\hbar \omega' = \frac{\hbar \omega - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow$$

$$p = \frac{\hbar \omega}{c} \quad \text{o} \quad p = \frac{E}{c}$$

$$\text{Momentum: } p + Mv = -p' + Mv'$$

$$\text{Energía : } E + \frac{1}{2}Mv^2 = E' + \frac{1}{2}Mv'^2$$

$$E = \hbar \omega \quad , \quad E' = \hbar \omega'$$

y elimino v'

$$\hbar(\omega - \omega') = \left(\frac{v}{c}\right) \hbar(\omega + \omega') + \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 (\omega + \omega')^2. \quad (\text{V.32})$$

Si $M \uparrow \infty$ y a primer orden en $\frac{v}{c}$, tenemos

$$\omega' = \omega \frac{(1 - v/c)}{(1 + v/c)} \quad \text{o} \quad \omega' \sim \omega \left(1 - \frac{2v}{c}\right) \quad (\text{V.33})$$

Este fenómeno ocurre cuando la policía mide la velocidad de los vehículos en la carretera o en la ciudad. Envía una señal con frecuencia ω y recibe la señal reflejada con frecuencia ω' . la diferencia relativa entre ambas nos da la velocidad del vehículo:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \sim 2 \frac{v}{c}.$$

Deforma que si el policía afirma poder medir una diferencia de 5 km/h en un vehículo, su pistola debe tener una resolución mejor que $2 \times 18000 / [300,000 \times 3600] \approx 3,3 \times 10^{-3}$.

Las pistolas no emiten una frecuencia fija sino tienen un ancho de banda, una distribución de la intensidad con la frecuencia. Pero este ejemplo ilustra la idea básica y constituye una prueba que nuestra hipótesis inicial V.31 , $E = \hbar \omega$ pasa esta prueba de blancura.

V.3. Confirmación experimental de la relatividad especial

Experimento de R. F. C. Vessot

A continuación describiremos un experimento realizado en 1980, con el objeto de comprobar las predicciones de la teoría de la relatividad general y especial [?], usando un reloj atómico. El acuerdo entre teoría y experimento que se verificó en este caso lo interpretaremos como una confirmación de que la naturaleza se ajusta, dentro de las aproximaciones usadas, a sus postulados. No existe, hasta el momento, un experimento que contradiga las predicciones sostenidas por la relatividad especial. Este hecho constituye una buena justificación para estudiarlas.

El experimento se realizó dentro de un cohete *Scout* que fue enviado a 10.000 km. de altura con un reloj atómico en su interior. Este reloj es en realidad un *Maser*: acrónimo de **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation, o Amplificación de micro-ondas mediante emisión estimulada de radiación, emite una onda cuya frecuencia f_o es de 1420,405751 Mhz, y permanece sin cambiar por un período de 100 segundos. Esta señal llega a tierra con una frecuencia ν y es comparada con la emitida por un reloj similar instalado en el lugar de recepción en tierra. Las variaciones porcentuales de frecuencia entre ambos relojes

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} \equiv \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o},$$

están dadas, de acuerdo a las predicciones de la relatividad general, por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} = \frac{\varphi_t - \varphi_S}{c^2} - \frac{|\vec{V}_t - \vec{V}_S|^2}{2c^2} - \frac{\vec{r}_{S-t} \cdot \vec{a}_t}{c^2}. \quad (\text{V.34})$$

El subíndice t indica *tierra* y S el cohete *Scout*. φ indica el potencial gravitacional Newtoniano en la superficie de la tierra y en la posición del cohete, de acuerdo al subíndice. Esta corrección es un efecto neto de la relatividad general: el tiempo transcurre más rápidamente en los puntos o regiones donde el potencial gravitacional es más débil. El segundo término corresponde al efecto Doppler de segundo orden, debido a la velocidad relativa entre el cohete y la base en tierra. El efecto Doppler de primer orden, proporcional a V/c , se elimina rebotando en el cohete una señal adicional de frecuencia conocida y comparándola con la frecuencia que retorna. Es un efecto similar al radar que la policía usa para medir la velocidad.

El tercer término de la fórmula V.34 proviene de la aceleración que experimenta el cohete, y r_{S-t} , indica la distancia desde el cohete al centro de la tierra.

La ecuación V.34 constituye la predicción teórica.

Al comparar las frecuencias recibidas desde la nave con las del reloj en la base y corregir los datos para tomar en cuenta un conjunto de factores mencionados a continuación, se llegó a la

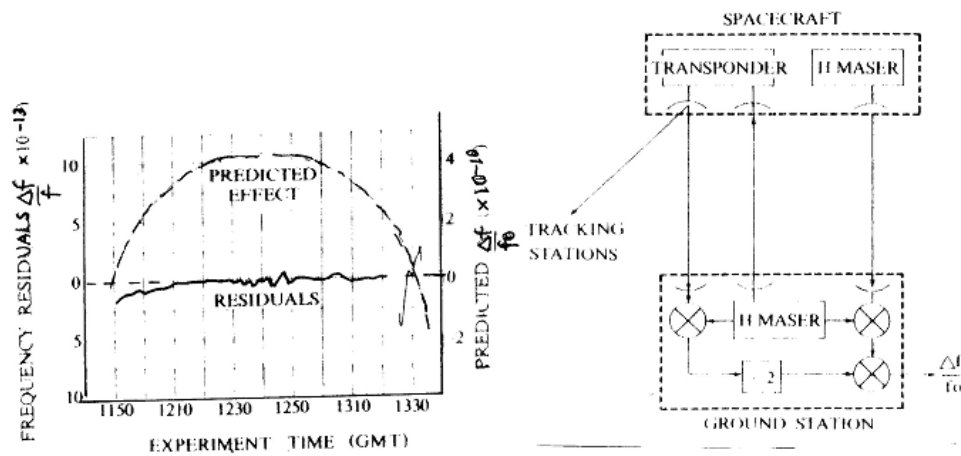


Figura V.4: Esquema del experimento realizado con el cohete **Scout**. Lo que se denomina los residuales es la diferencia entre lo esperado por la teoría y el valor experimental obtenido. la aceleración que experimenta el cohete llega a $18g$ y es preciso corregir los valores obtenidos cuyo origen es la aceleración, el plasma que se forma alrededor de la nave etc.

conclusión que la teoría de la relatividad (especial y general) y el experimento son consistentes a un nivel de precisión de 70 partes en 10^{-6} .

Algunos de los efectos que debieron ser tomados en cuenta para eliminar los errores de los datos obtenidos, fueron: campos magnéticos variables en magnitud y dirección, rotación de la última etapa del cohete, variaciones de la presión barométrica y temperatura. Otros efectos adicionales son la aceleración de aproximadamente $18g$ a la que está sometido el cohete durante su lanzamiento y la dispersión en la señal debido a la columna de electrones de la ionósfera que se interpone entre la nave y la base.

En este experimento no es posible distinguir entre los efectos cinemáticos proporcionales a potencias de V/c , de los dinámicos, que son generados por la relatividad general (proporcionales al potencial gravitacional). Esto debido a que el cohete Scout, varía constantemente su altura y velocidad durante el corto tiempo que dura el experimento.

Experimento Hafele y Keating

(J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.)

Este experimento consiste en ubicar cuatro relojes atómicos de Cesio en el interior de un

avión que fueron trasladados en un vuelo regular de una línea comercial de aviación alrededor del mundo dos veces consecutivas: una en dirección Este y la otra hacia el Oeste. El experimento fue realizado por J.C. Hafele y R. E. Keating en 1972, y su objetivo fue poner a prueba la teoría de la relatividad de Einstein utilizando relojes macroscópicos.

Como veremos después, la razón entre los tiempos registrados por un reloj en Tierra y otro en movimiento, pero con una velocidad baja ($u^2 \ll c^2$) se reduce a $[1 - u^2/(2c^2)]$, donde c es la velocidad de la luz. Como en este caso la Tierra está rotando los relojes estandar distribuidos sobre la superficie no pueden ser utilizados como relojes coordinados en un sistema inercial. De todas maneras pueden ser evaluados con respecto a un hipotético reloj ubicado en el Polo Norte (o Sur). En este caso al comparar ambos relojes, el reloj de referencia ubicado en el Polo observa que el localizado en el Ecuador con una velocidad $R\Omega$, y de esta forma mide un retraso en su medición:

$$1 - \frac{R^2 \Omega^2}{2c^2}, \quad \text{donde } R \text{ es el radio de la Tierra y } \Omega,$$

es su velocidad angular. Por otra parte la nave que circun-navega la Tierra cerca del plano ecuatorial con una velocidad ν relativa a la Tierra, experimenta un retraso proporcional a

$$1 - \frac{(R\Omega + \nu)^2}{2c^2}.$$

Por lo tanto si τ y τ_o son los tiempos registrados por el reloj en el avión y en Tierra respectivamente durante una circunvalación completa, su diferencia, en primera aproximación está dada por:

$$\tau - \tau_o = -\frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \tau_o.$$

En consecuencia, si la nave viaja en el mismo sentido de rotación de la Tierra (Este, $\nu > 0$) debería producir un retraso en el tiempo indicado en el reloj de la nave. De la misma manera, un viaje contra el sentido de rotación de la Tierra (Oeste $\nu < 0$) debería producir un adelanto en el tiempo de la nave si $\nu \approx R\Omega$.

La relatividad general predice un efecto adicional que, en el caso de campos gravitacionales débiles es proporcional a la diferencia en el potencial gravitacional entre la nave y el reloj en Tierra. Si el valor de la aceleración de gravedad es g y la altura que alcanza la nave es $h \ll R$, la diferencia de potencial es gh . Al introducir este nuevo elemento en la ecuación que relaciona los tiempos relativos, se obtiene:

$$\tau - \tau_o = \left[\frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \right] \tau_o.$$

El término gh/c^2 se denomina el *corrimiento al rojo gravitacional*, y predice un aumento en el tiempo de los relojes ubicados sobre el nivel de la Tierra.

Para las velocidades y alturas típicas que alcanzan las aeronaves, ambos términos de esta última ecuación: el gravitacional y el cinemático son comparables en magnitud absoluta. El término $\nu^2/(2c^2)$ es pequeño comparado con $R\Omega\nu/c^2$. De esta forma en el viaje hacia el Oeste ($\nu < 0$) ambos términos son positivos y se suman para una ganancia neta apreciable en los tiempos medidos. En el viaje hacia el Este ($\nu > 0$), tienden a cancelarse y a producir una diferencia neta pequeña.

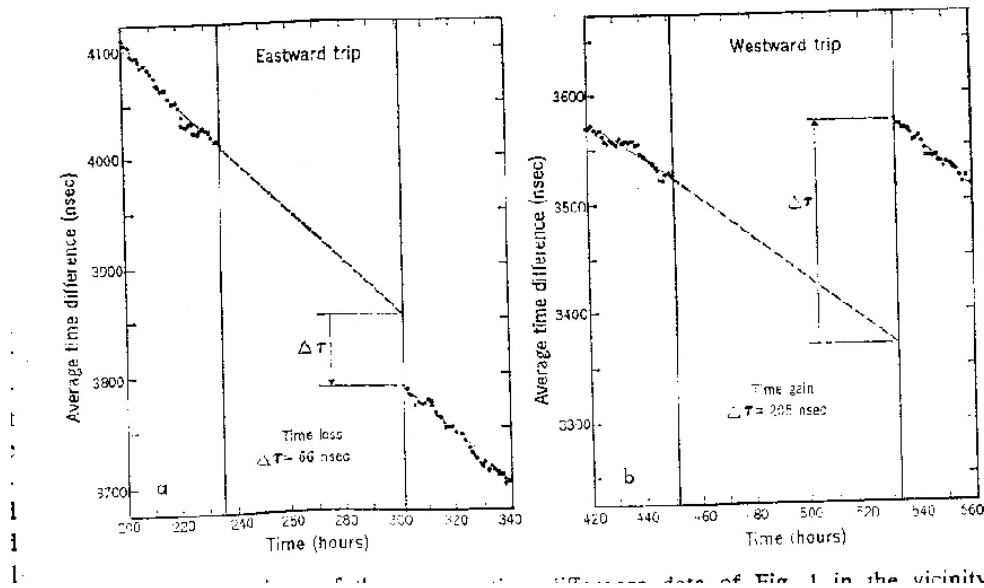


Figura V.5: Los intervalos $\Delta \tau$ señalados en la figura, corresponden a la diferencia observada entre el reloj atómico en viaje y el que permaneció en tierra. Existe una diferencia entre viajar al Este y al Oeste debido a la rotación de la tierra, que estos relojes son capaces de detectar.

Podemos comparar las diferencias de tiempo obtenidas a partir de la última fórmula y comparar con los límites de detección de los instrumentos. De hecho, este experimento fue posible debido notable disminución en el tamaño asociado a los relojes atómicos y, por supuesto, su exactitud.

El viaje lo suponemos sin escalas y, en una primera aproximación, el tiempo empleado es $\tau_o = 2\pi R\nu$. Sustituyendo este valor en la ecuación tenemos:

$$\tau - \tau_o = \left[\frac{2\pi R g h}{c^2} \frac{|\nu|}{|\nu|} - \frac{2R\Omega\nu}{|\nu|} - \frac{|\nu|}{2} \right]$$

Teoría	Este	40 ± 23 nanosegundos
	Oeste	275 ± 21 nanosegundos
Experimento	Este	59 ± 10 nanosegundos
	Oeste	273 ± 7 nanosegundos

Estos resultados proporcionan un respaldo concreto a las predicciones de la teoría de la relatividad especial. La paradoja del reloj, que analizaremos más adelante, se comprueba aquí con el uso de relojes macroscópicos.

Anteriormente se conocía este resultado por el decaimiento de partículas elementales (ver ejemplo). En este último caso, la verificación es a nivel microscópico.

V.3.1. Resumen

Hemos descrito un par de experimentos que confirman las predicciones deducidas a partir de la teoría de la relatividad especial y general hace ya más de 70 años. El error en uno de estos experimentos confirma la teoría con una precisión de 70 partes por millón (70 ppm).

Aún así no es posible afirmar que, una de ellas, la relatividad general es la teoría que describe correctamente el fenómeno de gravitación. La razón es la siguiente: estos experimentos fueron realizados en la superficie de la tierra y aquí el campo gravitacional es muy débil. Existe al menos un experimento que confirma las predicciones de la relatividad general en el límite de campos fuertes, pero nos referiremos a él más adelante.

¿Qué significa físicamente un campo gravitacional débil o fuerte?

Si la masa de una estrella cualquiera la designamos con M_* y su radio es R_* , entonces una medida de la intensidad del campo gravitacional se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{G M}{c^2} \leq r_* \leq 100 \frac{G M}{c^2}, & \quad \text{campo gravitacional fuerte.} \\ \text{Si } r_* \gg 100 \frac{G M}{c^2}, & \quad \text{el campo es débil.} \end{aligned} \tag{V.35}$$

Donde G es la constante gravitacional y c^2 es la velocidad de la luz. La dimensión de $\left[\frac{G M}{c^2} \right]$ es longitud.

Si $M = M_{\odot} \equiv$ masa del sol $= 1,9 \times 10^{33}$ gr, entonces: $\frac{G M_{\odot}}{c^2} = 1,477 \times 10^5$ cm.

Ejemplo

Existe una constante h , que se denomina la constante de Planck y que caracteriza los fenómenos cuánticos, es decir el comportamiento del mundo microscópico. Su valor es

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \quad [\text{Joule-segundo}].$$

Encuentre una cantidad que tenga dimensiones de **longitud** y en la cual intervengan además, las constantes G y c . Esta cantidad es la longitud de Planck.

Respuesta:

$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \quad \text{cm} \quad (\text{V.36})$$

(V.37)

La dimensión de h es [momentum \times distancia].

V.3.2. Transformación de un elemento de 4-Volumen

El elemento de 4 - volumen es un invariante

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \end{aligned}$$

Ahora, instantáneamente es $S'(\Delta t' = 0)$ el observador mide el elemento de largo Δx

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\ \boxed{\Delta x = \gamma\Delta x'} \quad \Delta t' &= 0 \end{aligned}$$

En un mismo punto x', y', z' medimos el intervalo de tiempo en S , Δt :

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta x' \cdot \Delta y' \cdot \Delta z' \cdot \Delta t' &= \gamma \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta x}{\gamma} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \\ &= \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \end{aligned}$$

d^4x' es un invariante bajo transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned} d^4x' &= \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x^\nu \\ \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| &= \det \Lambda_\nu^\mu = +1 \end{aligned}$$

El signo más indica una transformación de coordenadas ortocrona, es decir, que conserva el sentido del tiempo.

En una transformación en las coordenadas espaciales ocurre:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g'} d^4x' &= \sqrt{-g} d^4x \\ \sqrt{-g} &= r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{coordenadas esféricas}) \end{aligned}$$

por la misma razón anterior, el Jacobiano de una transformación de coordenadas espaciales (por ejemplo, de coordenadas x, y, z a r, θ, φ) está dado por:

$$\text{Jacobiano} = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \det \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \sqrt{g}$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu,\nu}$. Si además se incluye el tiempo y una transformación de Lorentz, tenemos:

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x$$

Esta es una relación general, válida para cualquier tipo de transformación de coordenadas. En realidad es una relación general porque es un invariante tensorial. Bajo este disfraz se puede escribir como:

$$\begin{aligned} d^4x &\equiv \frac{1}{4!} e_{\mu\nu\sigma\tau} dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\tau \\ e_{\mu\nu\sigma\tau} &= \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \\ \varepsilon_{0123} &= +1 \\ \varepsilon_{0023} &= 0 \\ \varepsilon_{1023} &= -1 \end{aligned}$$

Donde el tensor $e_{\mu\nu\sigma\tau}$ es el tensor totalmente antisimétrico, que toma los valores indicados. La forma natural de definir este elemento es recurriendo a las formas diferenciales.

V.3.3. Las Ecuaciones de Maxwell

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137} \quad \text{Unidades Sistema racionalizado de Heaviside-Lorentz}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nabla \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ \partial^i &= -\partial_i \\ F^{0i} &= -E^i \end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ & 0 & -B^3 & B^2 \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu},{}_{,\mu} = J^\nu \quad J^\nu = (\rho, \vec{J})$$

$$\begin{aligned} F^{*\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \\ \partial_\mu F^{*\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{ll} A^\mu & \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \\ \vec{A} & \rightarrow \vec{A} - \nabla \chi \\ \phi & \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right.$$

Ecuaciones Masivas con spin 1

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Conservación de la Carga

Ejemplo

En un alambre infinito se ubica una serie infinita de cargas q separadas por una distancia a en el sistema S que se encuentra en reposo con respecto al alambre.

Suponga un observador viajando con una velocidad v paralela al alambre. Encuentre la densidad lineal de cargas que mide este observador S'

En S la densidad es $\lambda = \frac{q}{a}$.

En S' la distancia a cambia

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' - \frac{v}{c^2}\Delta x) \\ \Delta x &= x_A - x_o = x_B - x_o \\ (x_B - x_o) &= \gamma[(x'_B - x'_o) - 0] \\ L &= \gamma L'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{a}{\gamma}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{q}{a'} = \gamma \frac{q}{a} = \gamma \lambda \\ \lambda' &= \gamma \lambda.\end{aligned}$$

De acuerdo a S' , existe una densidad lineal de corriente $J'_x = -\lambda' v$

$$\begin{aligned}J^u &= (c\lambda, \vec{J}) \\ J^\mu J_\mu &= c^2 \lambda^2 \quad (\text{en } S) \\ J'_\mu J'^\mu &= c^2 \lambda'^2 - \lambda'^2 v^2 = \lambda'^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \gamma^2 \lambda^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \lambda^2 c^2\end{aligned}$$

Se verifica que $J^\mu = (c\lambda, \vec{J})$ es el 4 - vector densidad de corriente.

Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$J^\mu = (\rho c, \rho \vec{v})$$

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Nq}{v} \\ c\rho' &= \Lambda_\nu^o J^\nu \\ &= \Lambda_o^o J^o + \Lambda_1^o J^1 \\ &= \gamma \rho c + \gamma \beta \rho v \\ \rho' c &= \rho c \gamma (1 - \beta^2) = \frac{\rho c}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\rho' = \frac{\rho}{\gamma}} \\ v' &= \Delta x' \Delta y' \Delta z' \\ \Delta x' &= \gamma \Delta x \quad (\Delta t = 0) \\ v' &= \gamma \Delta x \Delta y \Delta z = \gamma v \\ \rho' &= \frac{Nq}{v'} = \frac{Nq}{\gamma v} = \frac{\rho}{\gamma}\end{aligned}$$

V.4. Libertad de Gauge (Calibre)

V.4.1. Electromagnetismo

El tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ no cambia su valor si el potencial $A_\mu(x)$ se reemplaza por $A'_\mu(x)$ relacionado con el anterior de la siguiente forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$

Por convención, cuando escribimos $A_\mu(x)$, significa que las cuatro funciones A_μ dependen, en general, de todas las coordenadas: x^0, x^1, x^2 y x^3 . Es una forma de escribir menos índices.

Como se notó, las transformaciones de Gauge dependen de las coordenadas, cambian de punto a punto del sistema de coordenadas, a diferencia de una transformación global, como la acción de una transformada de Lorentz, por ejemplo, que desplaza a todos los puntos igual.

La existencia de un gauge indica que existen más funciones (o grados de libertad) de las necesarias (o de las cantidades físicas a determinar), por ejemplo, $F_{\mu\nu}$ es independiente de la función $\chi(x)$. La acción S , no debe depender de algún gauge específico. De esta forma al obtener las ecuaciones de movimiento podemos determinar un gauge que nos facilite encontrar una solución. Tampoco debe depender del sistema de coordenadas, debe ser covariante, junto con ser invariante de gauge. Esto se cumple en electrodinámica

Ejemplo:

Indicamos una cantidad física que es un invariante bajo cambio de Gauge:

$$\begin{aligned} \oint A_\mu dx^\mu &= \oint A'_\mu dx^\mu = \oint (A'_\mu dx^\mu + \partial_\mu \chi dx^\mu) \\ &= \oint A_\mu dx^\mu + 0, \quad \text{por ser una integral cerrada.} \end{aligned}$$

Supongamos un contorno cerrado y además espacial ($dt = 0$) :

$$\oint A_i dx^i = \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \text{Flujo de } \vec{B}.$$

Si $A_\mu(x)$ no está bien definido en la región de integración, por ejemplo una función como $\arctang(y/x)$ que permanece indefinida en $x = 0$, entonces resulta que \vec{A} y \vec{B} (o \vec{E}) no están relacionadas directamente.

Por ejemplo en el caso de una bobina toroidal $\vec{B} = \vec{E} = 0$ fuera del toroide. Sin embargo en el circuito de integración

$$\oint A_i dx^i \neq 0.$$

Este resultado cobra significado en el caso de un electrón pasando a través de la doble rendija. En mecánica cuántica el potencial A_μ puede ser medido a diferencia de la física clásica donde no lo es. La verificación experimental ocurre en el experimento de la doble rendija, cuando se estudia el efecto Aharonov-Bohm.

V.4.2. Solución General para Potencial A_μ para un campo electromagnético sin fuentes.

La ecuación $F_{[\mu\nu,\alpha]} = 0$ tiene como solución general $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Estas son las cuatro ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Las otras cuatro ecuaciones, con fuentes, son $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu/c$. Si consideramos sólo las ecuaciones de Maxwell en vacío (sin fuentes), que corresponden al caso de ondas electromagnéticas propagándose en el vacío, la ecuación diferencial correspondiente para el cuadri-potencial electromagnético es:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = 0. \quad (\text{V.38})$$

El método para resolver este sistema de ecuaciones es recurrir a la transformada de Fourier de esta función $a_\mu(k)$. No nos preocupamos de la validez de esta transformación, suponemos tácitamente que ambas funciones tienen soporte compacto, es decir están definidas en una región acotada del espacio tiempo y que tienden a cero rápidamente en infinito. O que son funciones de cuadrado integrable (L^2). Intuitivamente esto es como proyectar un vector en los vectores base y resolver para cada una de las componentes. Aquí es una función, de modo que existen infinitas bases (e^{ikx}) y proyectamos en cada una de ellas, de modo que la ecuación se transforma en una ecuación algebraica.

Volviendo al método, tomamos la transformada de Fourier de $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = \int_{k^0 \geq 0} [e^{ikx} a_\mu(k) + a_\mu^*(k) e^{-ikx}] d^4k \quad (\text{V.39})$$

$$\text{donde } kx = k^\mu x_\mu = k^0 x_0 + k^i x_i = k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x}.$$

Insertando la expresión V.39 en la ecuación V.38, obtenemos:

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = \int [(k^\mu k_\mu a_\nu - k^\mu k_\nu a_\mu) e^{ikx} + c.c.] d^4k \quad (\text{V.40})$$

Para que la integral sea nula para toda $a_\mu(k)$, debe cumplirse que:

$$k^2 a_\nu - (k a) k_\nu = 0. \quad (\text{V.41})$$

Existen dos soluciones posibles :

$$k^2 \neq 0 \quad \text{y} \quad k^2 = 0. \quad (\text{V.42})$$

$$\text{Si } k^2 \neq 0, \Rightarrow a_\mu = k_\mu f(k). \quad (\text{V.43})$$

$$\text{Si } k^2 = 0 \Rightarrow (k^\circ)^2 = |\vec{k}|^2, k_0 = + |\vec{k}|. \quad (\text{V.44})$$

la solución de la ecuación V.41, es:

$$k \cdot a = 0, \quad \text{o,} \quad |\vec{k}| a_0 + k^i a_i = 0. \quad (\text{V.45})$$

Dado un 4-vector k^μ , existen tres 4-vectores ortogonales a él. Dado que éste no es un espacio euclídeo, uno de los vectores ortonormales es el mismo k^μ , puesto que, por definición, ortonormal es: $(k^\mu k_\mu = 0)$. De este modo sólo debemos encontrar dos 4-vectores ortonormales a k^μ .

Soluciones. Ya conocemos una solución: $a_\mu = c(k) k_\mu$, a_μ proporcional a k_μ . Descubramos los dos vectores que restan y los definimos como $e_\mu^{(\alpha)}$ con $\alpha = 1, 2$. Como debemos cumplir la condición V.45 y debe ser diferente de la ya encontrada, imponemos que: $a_0 \equiv e_0^{(\alpha)} = 0$ para todo α .

Definimos la parte espacial $a_i \equiv e_i^{(\alpha)}$ y de acuerdo a la condición V.45, tenemos: $e_i^{(\alpha)} k_i = 0$ para todo α . Además queremos que los nuevos vectores sean unitarios:

$$e_i^{(\alpha)} e_i^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}$$

La solución general para $A_\mu(x)$ para ambos casos es:

$$a_\mu(k) = k_\mu f(k) + e_\mu^{(\alpha)}(k) b_\alpha(k) \quad (\text{V.46})$$

con $\alpha = 1, 2$

Introduciendo esta expresión para $a_\mu(k)$, podemos clasificar $A_\mu(x)$ en dos campos

$$A_\mu(x) = A_\mu^\perp(x) + A_\mu^\parallel(x) \quad (\text{V.47})$$

$$A_\mu^\perp = \int d^3k \left[e^{ikx} e_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) b_\alpha(\vec{k}) + c.c. \right]_{k^0=|\vec{k}|} \quad (\text{V.48})$$

Una de las integrales desapareció debido a que k^0 está determinado en función del módulo del vector \vec{k} . Este trabajo lo hace función (en realidad es una distribución) *delta de Dirac*: $\int dk^0 = \int \delta(k^0 - |\vec{k}|) dk^0 = 1$

$$A_\mu'^{\parallel\parallel} = \int d^4k \left[e^{ikx} k_\mu c(k) + c.c. \right], \quad (\text{V.49})$$

pero el término entre corchetes se puede escribir como:

$$\frac{1}{i} \partial_\mu (e^{ikx}) = \frac{i}{i} k_\mu e^{ikx}$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{i} \int d^4k \left[e^{ikx} c(k) + c.c. \right]$$

$$A_\mu^{\parallel\parallel} = \partial_\mu \alpha(x) \quad , \quad A_\mu^{\parallel\parallel} \text{ es sólo un gauge y se puede eliminar.} \quad (\text{V.50})$$

Recordemos la física de un problema no puede depender del gauge. El campo eléctrico no que medimos no puede depender del gauge que estamos usando para resolver la ecuación dinámica del campo.

$$A_\mu = A_\mu^\perp = \int d^3k \left[e^{ikx} e_\mu^{(\nu)} b_{(\alpha)}(\vec{k}) + c.c. \right]_{k^0=|\vec{k}|} \quad (\text{V.51})$$

Hemos demostrado que, en ausencia de fuentes, los campos eléctricos y magnéticos son ortonormales a la dirección de propagación. Éste es un resultado de validez general.

Hay más consecuencias atadas a este resultado. La interacción electromagnética es de alcance infinito. Esto está ligado a que el fotón tiene masa nula. Al examinar la acción del campo electromagnético, veremos que el hecho de imponer que la acción sea invariante de gauge, obliga a que la masa del fotón sea nula. Otras teorías de este tipo (vectoriales) que tienen masa no nula, son de corto alcance. El alcance de la fuerza depende de la masa de la partícula. En unidades en las cuales G , \hbar y c son unitarios, la masa tiene dimensiones de $1/[L]$, el inverso de longitud.

V.5. Cuerda de Nambu-Goto

[a)] Muestre que para una cuerda no-relativista, la acción de Nambu-Goto se reduce a un término con la energía cinética menos un término correspondiente a la energía potencial proporcional al largo de la cuerda.

[b)] Pruebe que la energía cinética proviene sólo de la componente de la velocidad perpendicular a cuerda.

[c)] Calcule la masa por unidad de largo que se desprende de la expresión de la energía potencial y cinética.

Muestre que las ecuaciones clásicas de movimiento indican que los extremos de la cuerda se mueven con la velocidad de la luz.

[d)] Demuestre que una variación de la acción S'_{pp} con respecto a η y x^μ sujeta a la restricción indicada en c) genera las mismas ecuaciones de movimiento que la acción S_{pp} .

Nota: En teoría de campos S'_{pp} es más conveniente debido a la ausencia de varios cuadrados de los operadores.

[e)] Demuestre que al elegir $\eta = \frac{1}{m}$ en S'_{pp} la acción se simplifica y se obtiene una expresión para el momentum conjugado

$$\Pi^\mu = m \dot{x}^\mu.$$

La acción relativista para una partícula libre se puede escribir

$$S_{pp} = m \int ds = -m \int d\tau (\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2},$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula

a) Demuestre que la ecuación del movimiento de esta partícula es

$$\dot{u}^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = 0, \text{ con } u^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{(\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu)^{1/2}}.$$

b) En el caso anterior se fijó de un comienzo la parametrización, con el tiempo propio τ . Considere el caso en que se introduce un capo $\eta(\tau)$ que es equivalente a una métrica (o a una reparametrización de la distancia) a lo largo de la curva.

Pruebe que

$$S'_{pp} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{\eta} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \eta m^2 \right)$$

donde $\eta(\tau)$ es un campo escalar que transforma como

$$\eta'(\tau'(\tau)) = \eta(\tau) \frac{d\tau}{d\tau'},$$

bajo una reparametrización, reproduce la misma ecuación de movimiento del caso anterior.

c) Demuestre que una reparametrización

$$\tau' = \tau - \xi(\tau)$$

donde ξ es una función diferenciable y pequeña, genera una transformación

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi(\tau) \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ \delta \eta &= \frac{d}{d\tau} \xi(\tau) \eta(\tau) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &\equiv x'^\mu(\tau) - x^\mu(\tau) \\ \delta \eta &\equiv \eta'(\tau) - \eta(\tau) \end{aligned}$$

Recuerde que bajo una reparametrización las coordenadas de un evento Q permanecen invariantes

$$x_Q'^\mu(\tau') = x_Q^\mu$$

V.6. Ejercicios Propuestos

- 1.– Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno H_α , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de $10^{-3}c$, $10^{-2}c$, y $10^{-1}c$. ¿Es una buena aproximación el resultado a primer orden?
- 2.– El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, por el movimiento orbital de aquella?
- 3.– (a) Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es $2,3 \times 10^{-6}$ segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0,00c$, $0,60c$, $0,90c$, y $0,99c$ respectivamente.

(b) Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

4.– A 200 km sobre el nivel del mar, una partícula de rayo cósmico primario choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0,99c$ y, en su sistema propio, se desintegra $2,5 \times 10^{-8} \text{ seg}$ después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?

5.– Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_o \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

Siendo N_o el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_o, \quad N(\tau) = \frac{N_o}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_o = 2,6 \times 10^{-8} \text{ s}$. Suponiendo que N_o mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez $0.9999 c$ llegando solamente el 1 %:

(i) Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.

(ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.

6.– Considere la siguiente definición de un tensor de proyección:

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad.

i) Demuestre que $P^{\mu\nu}$ es un tensor, o sea,

$$P'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta P^{\alpha\beta}$$

ii) Calcule y demuestre que $P^\mu_\nu P^\nu_\mu = \text{inv.}$

iii) Demuestre que P es un operador de proyección, o sea, $(P \cdot P)^\mu_\nu = P^\mu_\nu$.

7.– Un observador (S) en reposo con respecto a la esfera celeste ve una distribución isotrópica de estrellas, es decir:

$$dN = \frac{N_o}{4\pi} d\Omega(\theta, \phi)$$

con N_o el número de estrellas observables. Otro observador (S') se mueve con velocidad β con respecto al anterior. Determine la distribución de objetos estelares $dN'/d\Omega'$ visto desde S' y grafique en función de θ' . Verifique que

$$\int_{Esfera} dN' = N_o$$

Sugerencia: elegir eje azimutal esférico paralelo al eje del movimiento relativo.

- 8.– Un átomo de masa M experimenta una transición interna y emite un fotón. Si el átomo ha disminuido su energía en ΔE , calcule la frecuencia del fotón emitido en el sistema en que el átomo estaba inicialmente en reposo.
- 9.– Calcule la energía máxima que puede acarrear la partícula de masa m_1 en la desintegración $M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$.
- 10.– Calcule la energía umbral del nucleón N ($m_N \sim 940$ MeV) para que sea posible la reacción $\gamma + N \rightarrow N + \pi$. Los fotones (γ) de temperatura $T \sim 3^\circ\text{K}$ ($E_\gamma = kT$) chocan frontalmente con los nucleones.
- 11.– Para la reacción $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$, calcule la energía umbral del pión (π) para crear un kaón (K^+) emergiendo a 90° c/r dirección incidente en el sistema del laboratorio. En el sistema de laboratorio el neutrón (n) está en reposo. Considere $m_\pi = 140$ MeV, $m_n = 940$ MeV y $m_\Lambda = 1115$ MeV.
- 12.– En la figura se muestra la colisión elástica de un electrón con un núcleo. La energía del electrón incidente es E . Sea E' la energía del electrón emergente a un ángulo θ con respecto a la del haz incidente. Demuestre que

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Grafique E'/E como función de θ para electrones con energía de 10 GeV incidiendo sobre protones ($m_p \sim 940$ MeV) y sobre un núcleo de $A = 50$ nucleones ($M \sim A \times 940$ MeV). Compare ambos casos.

- 13.– Calcule la velocidad con la que se debe acercar una fuente de luz roja ($\lambda_r = 6500 \text{ \AA}$) para verla verde ($\lambda_v = 5300 \text{ \AA}$).
- 14.– Un cohete no relativista eyecta gases con velocidad a relativo al cohete. Demuestre que la ecuación del movimiento del cohete es

$$m \frac{dv}{dt} = -a \frac{dm}{dt}$$

- 15.– En el caso del cohete anterior y en régimen relativista conservación de masa no es aplicable. Demuestre que en este caso la ecuación del movimiento se modifica a la siguiente:

$$m \frac{dv}{dt} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

Demuestre entonces que

$$\beta = \frac{1 + \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}}{1 - \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}}$$

- 16.– Lleve a su forma explícita las siguientes ecuaciones covariantes:

- a) $\partial_\mu j^\mu = 0$
 b) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$
 c) $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$

Aquí $j^\mu = \rho u^\mu$ representa la cuadricorriente, con ρ la densidad de carga en el sistema en reposo de las cargas, y u^μ la cuadrivelocidad de las cargas. Además recordar que el tensor electromagnético fué definido por

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ \cdot & 0 & -B_3 & B_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & -B_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad [F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ \cdot & 0 & -B_3 & B_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & -B_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

- 17.– Para una esfera de densidad de masa uniforme que rota con la máxima velocidad angular permisible, calcule su momento angular y energía. Si la energía de este sistema rotante se asocia a su masa en reposo y su radio se iguala a la longitud de onda de Compton del sistema, determine el momentum angular en función de \hbar .
- 18.– Defínase una fotografía perfecta de la siguiente forma: i.- los fotones de la fuente llegan en forma paralela a la placa fotográfica; ii.- los fotones que se imprimen son los que llegan perpendicularmente a la placa; iii.- los fotones que se imprimen son los que llegan simultáneamente a la placa en el instante de obturación; y iv.- sobre la placa se imprime una imagen de tamaño natural. Demuestre que la fotografía perfecta de un cubo con movimiento paralelo a la placa es la misma que se obtendría a si el cubo está en reposo con respecto a la placa, pero rotado en cierto ángulo. Determine el ángulo de rotación.

Bibliografía

- [1] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [2] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [3] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [4] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [5] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrewes, Walker and Company, New York, 1998.
- [6] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [7] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [8] **Le Temps en Physique**, M. Mashaal, La Recherche, **24**, # 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la física).
- [9] **Classical Theory of Gauge Fields**, V. Rubakov, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002.
- [10] **Variations in the rotation of earth**, W. E. Carter et al., Sci., **224**, 1 june, page 957.
- [11] **Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser**, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., **45**, page 2081.
- [12] **Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains**, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.
- [13] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.
- [14] **Improved Kennedy-Thorndike Experiment to test Special Relativity**, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, page 1697.

- [15] **From Alchemy to Quarks: The Study of Physics as a Liberal Art**, Sheldon L. Glashow, Brooks and Cole Publishing Company, 1993.
- [16] **Gravity, An Introduction to Einstein's general Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, san Francisco, 2003.