

FI25A – Laboratorio de Física.

Guía Práctica: Linealización, Linealización semilogarítmica y tratamiento de errores en funciones complicadas.

1. Linealización.

La idea de este método es aprovechar las propiedades de la línea recta para interpolar datos, de manera de obtener una ecuación-modelo de los mismos.

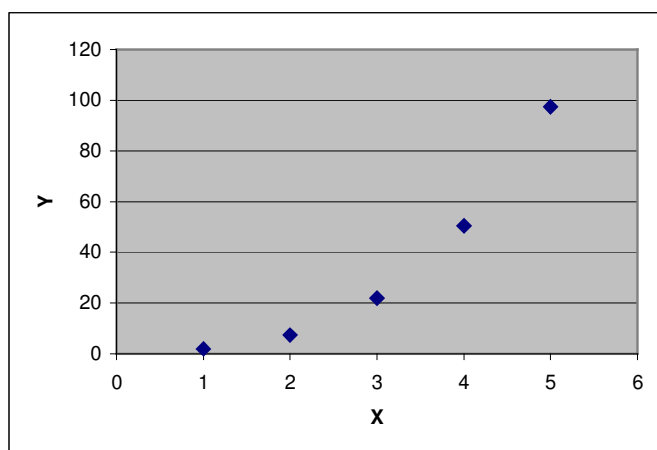
EJ: Linealice los siguientes datos:

X	Y
1	1,90
2	7,29
3	21,92
4	50,41
5	97,38

SOL.

Queremos encontrar un modelo del tipo $y = mx^n + c$.

Lo primero que se debería hacer es bosquejar un gráfico de los datos, para saber contra que nos estamos enfrentando...



Bien. Del gráfico podemos concluir que se trata de un polinomio cuadrático, cúbico o de grado superior a esos. Ahora que ya tenemos un indicio de cómo podría ser el modelo, vamos a usar la poderosa herramienta de la regresión lineal para encontrar la ecuación.

¿Cómo? Si hago un pequeño cambio de variable en el modelo anterior....Sea $x' = x^n$

$y = mx^n + c \Rightarrow y = mx' + c$. Es la ecuación de una recta. O sea, si grafico x^n versus y , veré una línea recta. En todo caso, sale mucho más rápido realizar una regresión lineal de los datos con su calculadora, y fijarse en el coeficiente de correlación r (si r es muy parecido a 1 o a -1 , significa que estamos en presencia de una línea recta). Esta es la forma de cerciorarse de que el n escogido sea realmente el n buscado, ya que si no lo fuera, ni el gráfico ni el r resultarían según lo esperado...

Sigamos desarrollando el ejemplo....

Analicemos el caso $n=2$

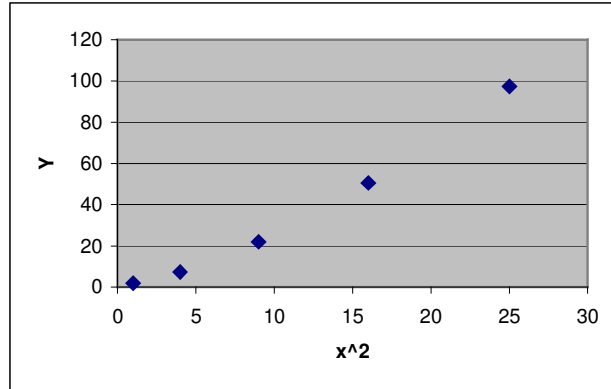
X^2	Y
1	1,90
4	7,29
9	21,92
16	50,41
25	97,38

El gráfico se parece bastante a una línea recta. Veamos lo que dice la regresión lineal:

$$Y = 4,015 X^2 - 8,382$$

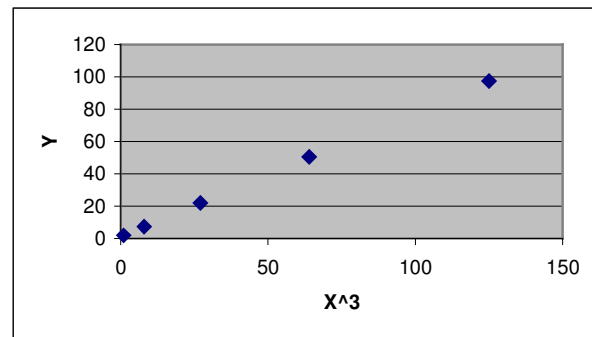
$$r = 0,9892.$$

Mmmm... El r es bastante creíble, pero no lo suficiente. Un r sensacional sería 0,99999. Sigamos estudiando otros n



Veamos el caso $n=3$:

X^3	Y
1	1,90
8	7,29
27	21,92
64	50,41
125	97,38



También se parece mucho a una línea recta. Pero la que siempre tiene la última palabra es la regresión lineal:

$$Y = 0,77 X^3 + 1,13.$$

$$r = 1.$$

Mmmm. Claramente, éste es el resultado correcto.

Nota: La estrategia usada en la resolución de este ejemplo es universal para resolver problemas sobre linealización. Deben preocuparse de ser expertos en regresión lineal con su calculadora, y fijarse bien en los n escogidos y en el r .

2. Linealización Semilogarítmica.

Este es un método un poco más general que el anterior para interpolar datos, y encontrar un modelo representativo. La idea de este método es no complicarse con elecciones de n , y aprovechar al máximo las bulladas propiedades de la función logaritmo.

EJ: Utilice linealización semilogarítmica para encontrar un modelo representativo de los datos.

X	Y
1	1,90
2	7,29
3	21,92
4	50,41
5	97,38

SOL.

Ahora la idea es buscar modelos de la forma:

$$(1) y = ke^{mx}$$

$$(2) y = j10^{nx}$$

Ahora, lo que haremos será aprovechar las propiedades de la función logaritmo:

Apliquemos \ln a (1) y \log a (2):

$$\ln(y) = \ln(k) + mx$$

$$\log(y) = \log(j) + nx.$$

Haciendo un cambio de variable:

$$CV: k' = \ln(k).$$

$$y1 = \ln(y)$$

$$J' = \log(j)$$

$$y2 = \log(y).$$

$$\Rightarrow y1 = mx + k'$$

$$y2 = nx + j'.$$

La ecuación de la recta de nuevo....

Entonces, el procedimiento a seguir es el siguiente:

X	y1 = $\ln(y)$
1	0,642
2	1,987
3	3,087
4	3,920
5	4,579

X	y2 = $\log(y)$
1	0,279
2	0,863
3	1,341
4	1,703
5	1,988

Ahora debemos hacer una regresión lineal de los datos transformados, de la misma forma de siempre... Se obtienen los siguientes resultados:

$$Y1 = 0,9807X - 0,0991 \quad r = 0,9901.$$

$$Y2 = 0,4258X - 0,0423 \quad r = 0,9900.$$

Ahora solo nos falta encontrar k y j . Es fácil darse cuenta que:

$$\ln(k) = -0,0991 \Rightarrow k = 0,9056.$$

$$\log(j) = -0,0423 \Rightarrow j = 0,9072.$$

Por lo tanto:

$$(1) y = 0,9056e^{0,9807x}$$

$$(2) y = 0,907210^{0,4258x}$$

Nota: La estrategia usada en la resolución de este ejemplo es universal. Solo deben preocuparse de no marearse con los logaritmos.

3. Tratamiento de Errores en Funciones Complicadas.

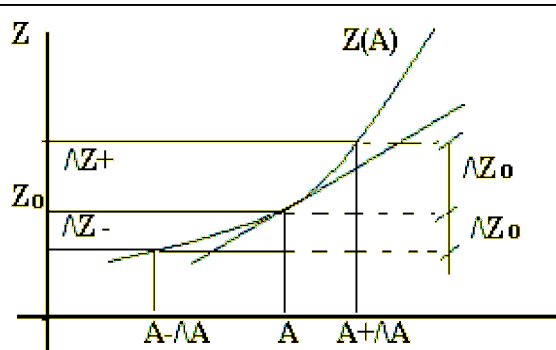
Recordemos que si tenemos la fórmula $Z \pm \Delta Z = f(A \pm \Delta A, B \pm \Delta B, \dots)$, la fórmula general del error asociado a Z es:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta ZA)^2 + (\Delta ZB)^2 + \dots, \text{ con } \Delta ZA = \frac{\partial f}{\partial A} \Delta A.$$

Con ésta fórmula podríamos tener el siguiente inconveniente:

Si en f están involucradas funciones cuyas derivadas son muy feas (como raíces, funciones trigonométricas, logaritmos, etc.), por lo que, calcular la derivada parcial requerida para estudiar la propagación de errores puede llegar a ser más placentero que un buen ejercicio de FI21A: Mecánica, con coordenadas esféricas...

Afortunadamente, los físicos se las arreglaron para saltarse ese paso matemático, con la siguiente estrategia:



- Evaluar la expresión sin considerar los errores, calculando Z.
- Evaluar la expresión con el error considerado sólo en una variable, por ejemplo A, calculando ZA. Esto se puede hacer de dos maneras:
 - Considerando solamente $ZA = Z(A + \Delta A)$ o bien $ZA = Z(A - \Delta A)$
 - Considerando ambas expresiones anteriores
- Para calcular el error, se hace dependiendo de cual forma eligieron anteriormente $\Delta ZA = |Z - ZA|$, para el caso a)
 $ZA = |Z(A + \Delta A) + Z(A - \Delta A)| / 2$, para el caso b (esto es lo más recomendable, pues "mira" hacia ambas vecindades).
- Finalmente $\Delta Z = \sqrt{(\Delta ZA)^2 + (\Delta ZB)^2 + \dots}$.
Y eso sería.

EJ: Calcular el error de Z, si $Z = \sin(A+B) \tan(C)$, si $\Delta A = 8 \pm 0,008$, $\Delta B = 5 \pm 0,005$ y $\Delta C = 9 \pm 0,009$.

Aplicando la estrategia anterior:

$$Z = \sin(8 + 5) \tan(9) = 0,03563.$$

$$ZA = \sin(8,008 + 5) \tan(9) = 0,03565.$$

$$ZB = \sin(8+5,005) \tan(9) = 0,03564.$$

$$ZC = \sin(8+5)\tan(9,009) = 0,03566.$$

$$\Rightarrow \Delta ZA = 0,00002.$$

$$\Delta ZB = 0,00001.$$

$$\Delta ZC = 0,00003.$$

$$\Rightarrow \Delta Z = \sqrt{(0,00002)^2 + (0,00001)^2 + (0,00003)^2} = 0,000037.$$

Finalmente ΔZ se aproxima a una cifra significativa y se presenta el resultado de la forma.

$$Z = 0,03563 \pm 0.00005 [-]$$