

Repaso

$$dN_e = g(\epsilon) \cdot f(\epsilon) d\epsilon$$

↑
densidad de
estados

↑
densidad de
probabilidad de ocupación

$$\text{Fermi-Dirac: } f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{\epsilon}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT}} + 1}$$

$\alpha = -\frac{\epsilon_F}{kT}$

$$\text{Bose-Einstein: } f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}$$

$$\text{Maxwell-Boltzmann: } f(\epsilon) = C e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

ej: Gas de electrones

$$\text{Se dedujo en clase: } g(\epsilon) = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \epsilon^{1/2}$$

$$\Rightarrow dN_e = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT}} + 1} d\epsilon$$

- Calculemos la Energía de Fermi en función de N
a $T = 0 \text{ K}$

$$N = \int dN_e$$

$$= \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} f(\epsilon) d\epsilon$$

$$\text{a } T=0 \quad f(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_F \\ 0 & \text{si } \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} e^{1/2} d\epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2} \cdot \frac{2}{3}$$

despejando E_F :

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

- Calculamos la energía media por partícula a $T=0$ K.

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int \epsilon dN_\epsilon}{\int dN_\epsilon} = \frac{1}{N} \int \epsilon dN_\epsilon$$

$$\Rightarrow \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{N} \cdot \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} \cdot f(\epsilon) d\epsilon$$

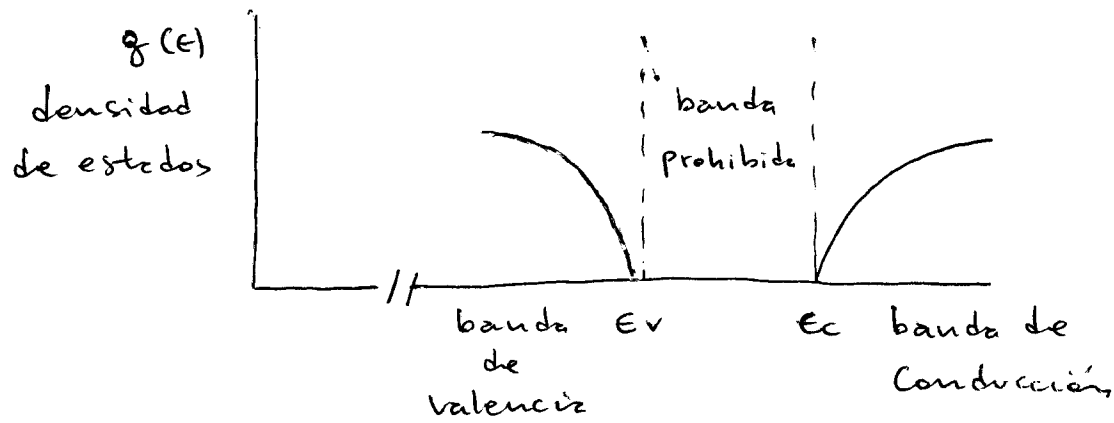
$$= \frac{V}{N} \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon$$

$$= \frac{V}{N} \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot E_F^{5/2} \cdot \frac{2}{5}$$

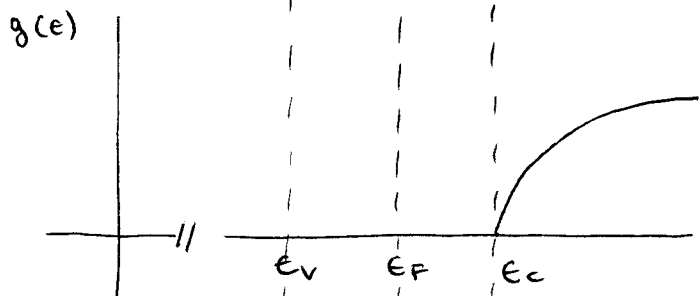
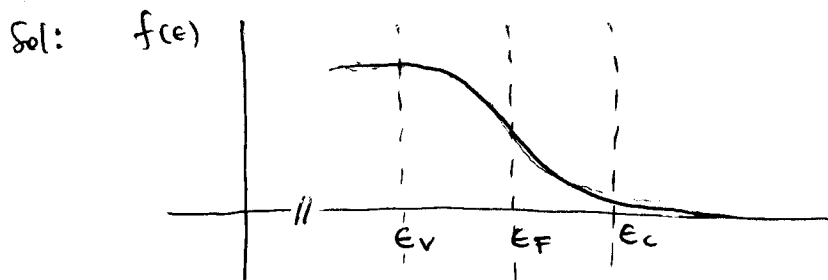
$$\frac{3}{2} E_F^{-3/2} \text{ (de la parte anterior)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{5} E_F}$$

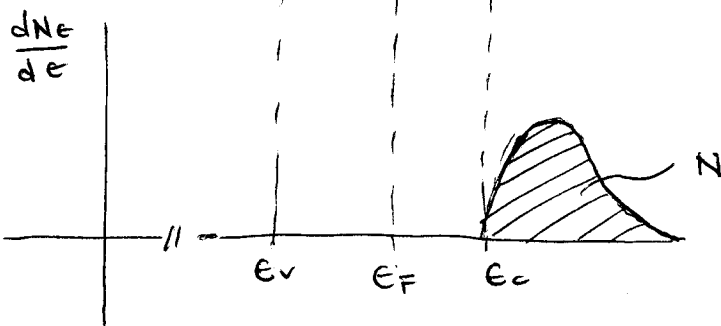
P1] En un semiconductor existen bandas de energía permitidas y prohibidas, como se muestra en la figura



Assumiendo que la densidad de estados en la banda de conducción tiene la forma $g(E) = \frac{V(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} E^{1/2}$ y que la energía de Fermi se encuentra en la mitad de la banda prohibida, determine la cantidad de electrones en la banda de conducción a temperatura ambiente.



$$g(E) = g_0 \cdot (E - E_c)^{1/2}$$



$$dN_e = g(E) \cdot f(E) dE$$

$$N = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dE$$

a temperatura ambiente: $kT \sim 0,025 \text{ eV}$

en cambio: $E_c - E_F \sim 1 \text{ eV}$ para un semiconductor.

$$\Rightarrow E - E_F \gg kT$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} \approx e^{-\frac{E - E_F}{kT}}$$

$$\text{Luego, } N = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-\frac{E - E_F}{kT}} dE$$

\uparrow
 $e^{-\frac{E - E_c + E_c - E_F}{kT}}$

$$\Rightarrow N = \frac{V (2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} \underbrace{\int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-\frac{E - E_c}{kT}} dE}_{\equiv I}$$

$$I = \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-\frac{E - E_c}{kT}} dE = \int_0^{\infty} e'^{1/2} e^{-\frac{e'}{kT}} de' \quad \left. \begin{array}{l} u = e'^{1/2} \\ du = \frac{de'}{2u} \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{kT}} du$$

$$= -2 \frac{\partial}{\partial d} \int_0^{\infty} e^{-du^2} du \quad ; \quad d = \frac{1}{kT}$$

$$= -2 \frac{\partial}{\partial d} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} d^{-1/2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (kT)^{3/2}$$

por enunciado



$$\Rightarrow N = \frac{V \cdot (2mkT)^{3/2} \sqrt{\pi}}{4\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}, \text{ pero } E_c - E_F = \frac{E_c - E_F}{2} \equiv \frac{E_g}{2}$$

Reordenando términos, finalmente queda:

$$N = 2V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

P2] Según el modelo de Debye, la energía vibracional de un cristal está dada por:

$$E = 9 N K T \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} \frac{q^3}{e^q - 1} dq$$

donde T_d es la temperatura de Debye, la cual es característica del cristal. Determine C_v para los límites $T \ll T_d$ y $T \gg T_d$.

Sol: Si $T \ll T_d \Rightarrow \frac{T_d}{T} \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow E = 9 N K T \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{q^3}{e^q - 1} dq}$$

$\frac{\pi^4}{15}$ (integral vista en clase, idéntica al gas de fotones)

$$\Rightarrow C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 9 \cdot N K \frac{T^3}{T_d^3} \cdot 4 \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_v = \frac{12}{5} \pi^4 \frac{N K}{n R} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3}$$

Si $T \gg T_d \Rightarrow \frac{T_d}{T} \ll 1 \Rightarrow q \ll 1 \Rightarrow e^q \approx 1 + q$

$$\Rightarrow E = 9 N K T \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} q^2 dq$$

$$= 9 N K T \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \cdot \left(\frac{T_d}{T} \right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 3 N K T$$

$$\Rightarrow \boxed{C_v = \frac{3 N K}{n R}}$$