UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

20 de Abril de 2006

FI-22A Física Estadística.
Semestre Otoño
Tiempo: 2 hrs. 15 min.

CONTROL Nº 1

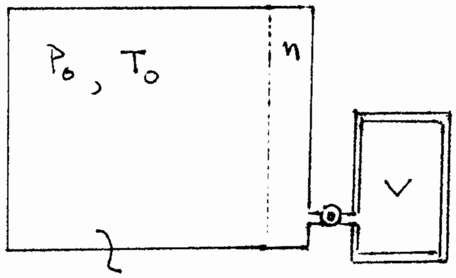
Profesor: P. Martens
Sección: 02

1. Desde un depósito (gasómetro) donde se encuentra gas ideal a presión y temperatura constantes (P_0, T_0), se inyecta gas a una cámara adiabática de volumen V, inicialmente al vacío, hasta que la presión interior alcanza un valor λP_0, con $\lambda < 1$.
   a) Calcular la cantidad de gas que entró en la cámara, expresada en moles.
   b) Encontrar la variación de la entalpía del gas que entró, correspondiente a este proceso.

2. La distribución de velocidades de un gas ficticio de N partículas monoatómicas de masas m confinadas en una cámara de volumen V es:
   $dN_v = NA\ v(v_0 - v)dv$ para $0 \leq v \leq v_0$
   $dN_v = 0$ para $v > v_0$
   Donde v_0 es una constante conocida y v la rapidez de las partículas.
   a) Calcular la constante de normalización A.
   b) Graficar la función de distribución $f(v)$.
   c) Calcular las velocidades: más probable, media y cuadrática media.
   d) Calcular la expresión del número de choques con la pared por unidad de área y unidad de tiempo en términos de N, V y v_0.
   e) Calcular la presión que ejerce el gas sobre las paredes en términos de N, V, v_0 y m.
   f) Calcular el tiempo que debe transcurrir para que la presión correspondiente a un cierto instante disminuya a la mitad, debido al escape de partículas al exterior por un pequeño orificio de área dA en una de las paredes de la cámara.

3. A una esfera hueca de grafito de radio r_i = 0,05m y r_e = 0,15m, se le suministra energía mediante un calentador ubicado en su centro, a razón de 10,8 W. De este modo se genera una diferencia de temperaturas igual a 50 ºC entre las superficies interna y externa.
   Calcular la conductividad térmica del grafito, expresándola en W/mK.

CONTROL N° 1 20/04/06 U de Ch.



gasómetro

Los n moles que entran a la cámara adiabática se encuentran inicialmente en el gasómetro a (T_0, P_0). Modelamos esto como contenidos en el espacio limitado por tabique ideal imaginario móvil.

Al pasar a la cámara, hay un trabajo W realizado <u>sobre</u> nuestro sistema (los n moles) : $W = -P_0V_0$, donde V_0 es el volumen que ocupa en el gasómetro.

Luego, como $P_0V_0 = nRT_0 \rightarrow \boxed{W = -nRT_0}$ (1)

En su expansión al vacío, dentro de la cámara adiabática el sistema no realiza trabajo ni intercambia calor.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{En el gasómetro :} & U_0 = n c_v T_0 \\ \text{En la cámara :} & U_f = n c_v T_f \end{array}\right\} \therefore \Delta U = n c_v (T_f - T_0) \quad (2)$$

1ª Ley : $\Delta U = -W$ (con $Q = 0$)

$$\therefore \quad n c_v T_f - n c_v T_0 = nRT_0 \rightarrow T_f = \frac{c_v + R}{c_v} T_0$$

$$\therefore \quad \boxed{T_f = \gamma T_0} \quad (3)$$

a) Finalmente, en la cámara hay $n = \dfrac{\lambda P_0 V}{RT_f} \rightarrow \boxed{n = \dfrac{\lambda P_0 V}{\gamma R T_0}}$

b) $H_0 = C_p T_0 + \text{cte}$; $H_f = C_p T_f + \text{cte}$ ($H(T) = C_p T + \text{cte}$ en un gas ideal)

$$\therefore \quad \Delta H = H_f - H_0$$

$$\boxed{\Delta H = (\gamma - 1) C_p T_0} \quad //$$

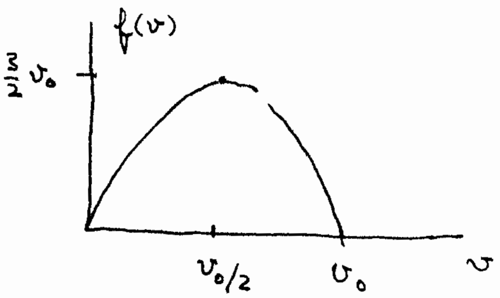
2. $\boxed{dN_v = NA\, v(v_0 - v)\, dv}$

a) $\cancel{\underbrace{\int dN_v}_{N}} = \cancel{N}A \int_0^{v_0} v(v_0-v)\, dv \rightarrow A = \dfrac{1}{\int_0^{v_0} v(v_0-v)\,dv}$

$\therefore \boxed{A = \dfrac{6}{v_0{}^3}}$

b) $dN_v = \dfrac{6N}{v_0^3}(v_0 - v)\, v\, dv$; $\dfrac{dN_v}{dv} = 0 = \dfrac{6N}{v_0^3}(v_0 - 2v) \rightarrow v^* = \frac{1}{2} v_0$

$f(v) = \dfrac{6}{v_0^3}(v_0 - v)\, v \rightarrow \overset{max}{f(v)} = \dfrac{3}{2v_0}$



c) $\boxed{v_{mp} = v_0/2}$;

$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int v\, dN_v = \frac{1}{N}\int_0^{v_0} v \dfrac{6N}{v_0^3}(v_0 - v)\, v\, dv$

$= \dfrac{6}{v_0^3} \cdot \dfrac{1}{12} v_0^4 \qquad \therefore \boxed{\langle v \rangle = \dfrac{v_0}{2}}$

$\langle v^2 \rangle = \int_0^{v_0} v^2 \dfrac{dN_v}{N} = \int_0^{v_0} v^2 \dfrac{6}{v_0^3}(v_0 v - v^2)\, dv$

$\therefore \langle v^2 \rangle = \dfrac{6}{v_0^2}\int_0^{v_0} v^3 dv - \dfrac{6}{v_0^3}\int_0^{v_0} v^4 dv \rightarrow \langle v^2 \rangle = \dfrac{3}{10} v_0^2$

$\therefore \boxed{v_{cm} = \sqrt{\tfrac{3}{10}}\, v_0}$

d) $Q = \dfrac{1}{4}\dfrac{N}{V}\langle v \rangle$ (justificar) $\rightarrow \boxed{Q = \dfrac{1}{8}\dfrac{N}{V} v_0}$

e) $P = \dfrac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle \rightarrow \boxed{P = \dfrac{1}{10}\dfrac{N}{V} m v_0}$

f)

f) De la pregunta e) : $P = \frac{1}{10} \frac{N}{V} m v_o$ (1)

En nuestro caso, $N(t)$, luego también $P(t)$.

Para $t = 0$, $N(0) = N_o$ $\therefore$ $P_o = \frac{1}{10} \frac{N_o}{V} m v_o$ (2)

Recordar que. $\boxed{v_o = cte}$

Luego, de (1) y (2) : $\boxed{\frac{P}{P_o} = \frac{N}{N_o}}$ (3)

De la pregunta d) se desprende que el número de partículas que escapan por dA en un dt es :

$$dN = - \frac{N v_o dA}{8V} dt \longrightarrow \frac{dN}{N} = - \frac{v_o dA}{8V} dt.$$

$$\therefore \quad N(t) = N_o e^{- \frac{v_o dA}{8V} t} \quad (4)$$

De (3) y (4) : $\boxed{\frac{P}{P_o} = e^{- \frac{v_o dA}{8V} t}}$ (5)

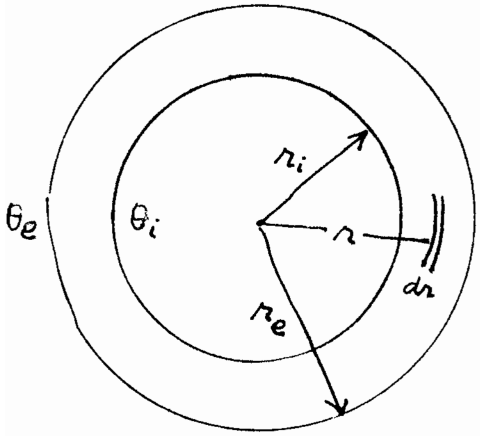
Finalmente, cuando $P = \frac{P_o}{2}$, $\frac{1}{2} = e^{- \frac{v_o dA}{8V} t^*}$

Tomando logaritmos :

$$- \ln 2 = - \frac{v_o dA}{8V} t^*$$

o $\boxed{t^* = \frac{8 V \ln 2}{v_o dA}}$

3.



En el caso de la esfera : $\dot{Q} = -kA\dfrac{d\theta}{dr}$

$A = 4\pi r^2$ a la distancia r.

$\therefore\ \dot{Q} = -k4\pi r^2 \dfrac{d\theta}{dr}$ con $\underline{\dot{Q} = 10{,}8\,W}$ (cte).

Luego, separando variables e integrando entre los límites indicados :

$$\dot{Q}\int_{r_i}^{r_e}\frac{dr}{r^2} = -4\pi k\int_{\theta_i}^{\theta_e} d\theta$$

$$\therefore\ \dot{Q}\left(-\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_i}\right) = -4\pi k(\theta_e-\theta_i)$$

o $$\dot{Q}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_e}\right) = 4\pi k(\theta_i-\theta_e)$$

$$10{,}8\,W\left(\frac{1}{0{,}05}-\frac{1}{0{,}15}\right) = 4\pi\,k\cdot 50$$

$$\therefore\ \boxed{k = 0{,}229\,\frac{W}{mK}}$$