

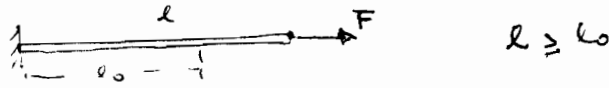
#3. La ecuación de estado de una banda elástica está dada por:

$$F = a\theta \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right), \text{ donde } l_0 \text{ es su longitud natural y } a \text{ una constante,}$$

F es la fuerza que estira el resorte.

Calcular el trabajo W al estirar el elástico desde l_0 hasta $2l_0$ en forma cuasi-estática isotérmica.

Solución:



$$l \geq l_0$$

$dW = -Fdl$ (Al estirar el resorte se hace trabajo sobre el sistema, por lo tanto, según nuestra convención de signos, se trata de trabajo negativo)

$$\begin{aligned} \therefore W &= - \int_{l_0}^{2l_0} a\theta \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right) dl \\ &= -a\theta \left[\frac{1}{l_0} \int_{l_0}^{2l_0} l dl - \int_{l_0}^{2l_0} dl \right] \quad (\theta = \text{cte}) \end{aligned}$$

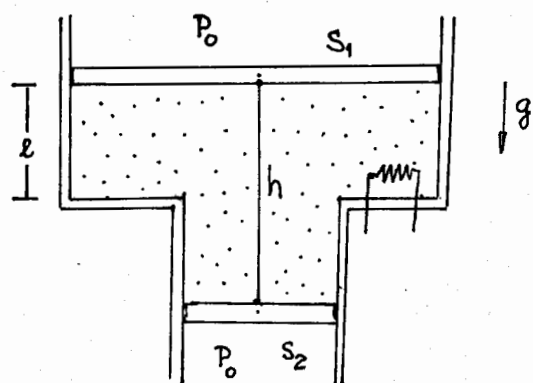
$$= -a\theta \left[\frac{1}{l_0} \left. \frac{1}{2} l^2 \right|_{l_0}^{2l_0} - l \right]_{l_0}^{2l_0}$$

$$= -a\theta \left[\frac{1}{2l_0} (4l_0^2 - l_0^2) - (2l_0 - l_0) \right]$$

$$\therefore W = -a\theta \left[\frac{3}{2} l_0 - l_0 \right]$$

$$\boxed{W = -\frac{a\theta}{2} l_0}$$

#

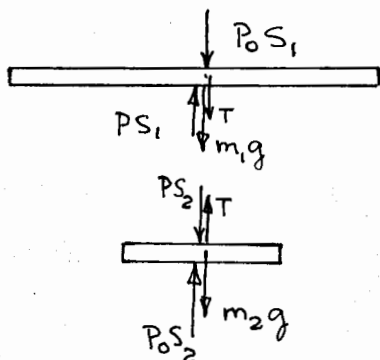


En un tubo vertical de paredes adiabáticas compuesto de dos secciones de diferentes áreas S_1 y S_2 y abierto en ambos extremos pueden deslizarse sin roce dos émbolos, uno en cada sección del tubo, unidos por un hilo ideal de longitud h . El espacio entre ambos está ocupado por un mol de un gas ideal monoatómico.

La presión exterior es constante igual a P_0 y la masa total de ambos émbolos es $m = m_1 + m_2$.

Si inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio, con el émbolo superior a una distancia l por encima del estrechamiento del tubo, calcular el desplazamiento Δl de los émbolos al entregar al gas una cantidad Q de calor mediante una resistencia eléctrica.

Despreciando el peso de la masa de gas, consideramos el equilibrio mecánico del sistema. Los correspondientes diagramas de cuerpo libre de ambos sólidos son:



P : presión del gas ; T : tensión del hilo

$$\therefore P_0 S_1 + m_1 g + T - P S_1 = 0 \quad (1)$$

$$P S_2 + m_2 g - T - P_0 S_2 = 0 \quad (2)$$

Sumando m. a m. las ecns. (1) y (2):

$$P(S_2 - S_1) + P_0(S_1 - S_2) + m g = 0$$

de donde se obtiene que

$$P = P_0 + \frac{m g}{\Delta S} \quad (3) \text{ con } \Delta S = S_1 - S_2 > 0$$

Se observa que P es independiente de l . Es constante.

Ahora, de la ecuación de estado del gas ideal, con $P = \text{cte.}$

$P \Delta V = R \Delta T$ (4) donde ΔT es la variación de la temperatura al variar el volumen a que se encuentra el gas cuando los émbolos se desplazan, a presión constante.

Pero: $V = l S_1 + (h-l) S_2$

$$V = l \Delta S + h S_2 \quad (5)$$

De igual modo, $V' = l' \Delta S + h S_2$ (6)

de modo que $\Delta V = l \Delta S + \Delta l \Delta S + h S_2 - l \Delta S - h S_2$

o finalmente, $\boxed{\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l}$ (7)

La variación ΔT de temperatura es, de (4), $\Delta T = \frac{P \Delta V}{R}$

o sea, $\boxed{\Delta T = \frac{(P_0 \Delta S + mg) \cdot \Delta l}{R}}$ (8)

Ahora, en una transformación isobárica de un gas ideal:

$$Q = C_p \Delta T, \quad \text{con } C_p = \frac{5}{2} R \text{ (constante)}$$

$$\therefore Q = \frac{5}{2} (P_0 \Delta S + mg) \cdot \Delta l$$

finalmente,

$$\boxed{\Delta l = \frac{2Q}{5(P_0 \Delta S + mg)}}$$

P] Un recipiente aislado térmicamente contiene n_0 moles de aire (gas ideal) a la presión P_0 y temperatura T_0 . Este recipiente está provisto de una llave que al abrirse lentamente, comunica su interior a la atmósfera, donde el aire se encuentra a la presión constante P_A ($P_A > P_0$) y temperatura T_0 . Al entrar aire al frasco, la presión interior se eleva hasta alcanzar el valor final P_A .

Determine la temperatura final del gas en el recipiente y el número de moles que entró en el mismo.

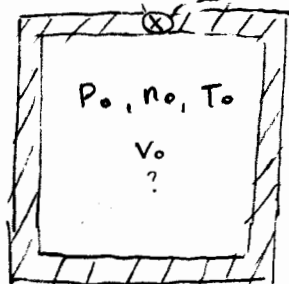
Sol: datos: n_0, P_0, T_0, P_A

incógnitas: n_1, T_f

Inicialmente: válvula cerrada

P_A, T_0

P_A, n_1, T_0, V_A
?



$$P_A V_A = n_1 R T_0 \quad (1) \quad (\text{gas exterior})$$

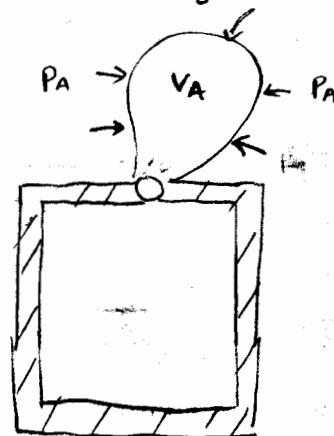
$$P_0 V_0 = n_0 R T_0 \quad (2) \quad (\text{gas interior})$$

El sistema consistirá en el gas interior + el gas exterior

Al abrir la válvula, los n_1 moles del gas exterior ingresarán al recipiente, por lo tanto, el sistema realizará el siguiente trabajo

$$W = -P_A (0 - V_A) = -P_A V_A \stackrel{\text{por (1)}}{=} -n_1 R T_0$$

$$\Rightarrow W = -n_1 R T_0 \quad (3)$$



Una vez que ingresa todo el gas exterior, se tiene la siguiente ecuación de estado:

$$P_A V_0 = (n_0 + n_1) R T_f \quad (\text{la presión en el recipiente iguala a la presión atmosférica})$$

$$\frac{n_0 R T_0}{P_0}$$

$$\Rightarrow \frac{P_A}{P_0} n_0 T_0 = (n_0 + n_1) T_f \quad (4)$$

Además, se cumple la 1ª ley de la Termodinámica

$$\Delta U = Q - W$$

0 (pues las paredes del recipiente son adiabáticas y el gas externo está a la misma temp. que la atmósfera)

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{(n_0 + n_1) C_v (T_f - T_0)} = - \underbrace{W}_{- n_1 R T_0}$$

$$\Rightarrow (n_0 + n_1) C_v (T_f - T_0) = + n_1 R T_0 \quad (5)$$

Resolviendo (4) y (5) para n_1 y T_f se llega a:

$$n_1 = \frac{P_A - P_0}{\gamma P_0} n_0$$

$$T_f = \frac{\gamma P_A}{P_A + P_0 (\gamma - 1)} T_0$$

indicación: usar que $C_p - C_v = R$ y $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

P] Sea la siguiente distribución (de Maxwell-Boltzmann)

$$f_{MB}(v) = A v^2 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} \quad v > 0$$

(a) Normalice $f_{MB}(v)$

(b) Encuentre v_{mp} , \bar{v} , $\overline{v^2}$

hint: Sea $I_n(d) \equiv \int_0^\infty u^n e^{-du^2} du \quad d > 0$

n	0	1	2	3	4
$I_n(d)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{d}}$	$\frac{1}{2d}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{d^3}}$	$\frac{1}{2d^2}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{d^5}}$

Sol:

$$(a) \quad N = \int_0^\infty f_{MB}(v) dv$$

$$= \int_0^\infty A v^2 e^{-dv^2} dv \quad ; \quad d = \frac{m}{2kT}$$

$$= A \cdot I_2(d)$$

$$= \frac{A}{4} \sqrt{\frac{\pi}{d^3}}$$

$$= \frac{A}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2}}$$

$$(b) \quad v_{mp}: \quad \frac{\partial f_{MB}(v)}{\partial v} = 0$$

$$\Rightarrow 2v e^{-av^2} + v^2 e^{-av^2} (-2av) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2av^2 = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{1}{a} = \frac{2kT}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v f_{MB}(v) dv$$

$$= \frac{A}{N} \underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-av^2} dv}_{I_3(a) = \frac{1}{2a^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

$$\bar{v^2} = \frac{1}{N} \int v^2 f_{MB}(v) dv$$

$$= \frac{A}{N} \underbrace{\int v^4 e^{-av^2} dv}_{I_4(a) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{v_{cm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$