

Una placa delgada elíptica de semi-eje  $a, b$  ( $a > b$ ) puede moverse libremente en torno a su centro que está fijo. Es colocada en mov. dándole una velocidad angular de magnitud " $n$ " entorno de un eje sobre su plano, igualmente inclinado respecto a ambos semiejes de la elipse. Dem. que el eje instantáneo de rotación volverá a estar sobre el plano de la elipse después de un tpo:

$$T = 2 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 - x^2}} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x'^4}} dx'$$

$$\gamma \quad \lambda^2 = \frac{\Omega^2}{2} = \frac{(a^2 - b^2)n}{(a^2 + b^2)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}}$$

Solución: Sean  $I_x, I_y, I_z$  momentos de inercia en los ejes principales.

$\Rightarrow$  ecs. de Euler:

$$I_x \dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y (I_z - I_y) = 0$$

$$I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x (I_y - I_x) = 0$$

pero como es placa plana  $\Rightarrow I_z = I_x + I_y$

$$\Rightarrow I_x \dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y (I_x + \cancel{I_y} - \cancel{I_y}) = 0$$

$$I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_x - I_y) = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x (I_y - I_x) = 0$$

$$\Rightarrow I_x \dot{\omega}_x + I_x \omega_z \omega_y = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y = 0 \quad (1)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - I_y \omega_x \omega_z = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (I_x + I_y) \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x (I_y - I_x) = 0 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{cte.}$$

$$\text{ya que } (1) \cdot \omega_x + (2) \cdot \omega_y = \dot{\omega}_x \omega_x + \dot{\omega}_y \omega_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_x^2}{2} + \frac{\omega_y^2}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{cte.}}$$

$$\gamma \quad \vec{\omega}_0 = \omega_x^0 \hat{x} + \omega_y^0 \hat{y} \quad \text{con } m = \sqrt{(\omega_x^0)^2 + (\omega_y^0)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_x^2 + \omega_y^2 = m^2} \quad \forall t$$

en particular supongo

$$\omega_x = m \cdot \cos(\phi(t)/2)$$

$$\omega_y = m \cdot \sin(\phi(t)/2)$$

reemplazando en (1)

$$\Rightarrow (m \cos \phi/2) + \omega_z m \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow -m \sin \phi/2 \dot{\phi}/2 + \omega_z m \sin \phi/2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_z = \dot{\phi}/2}$$

y en (3):

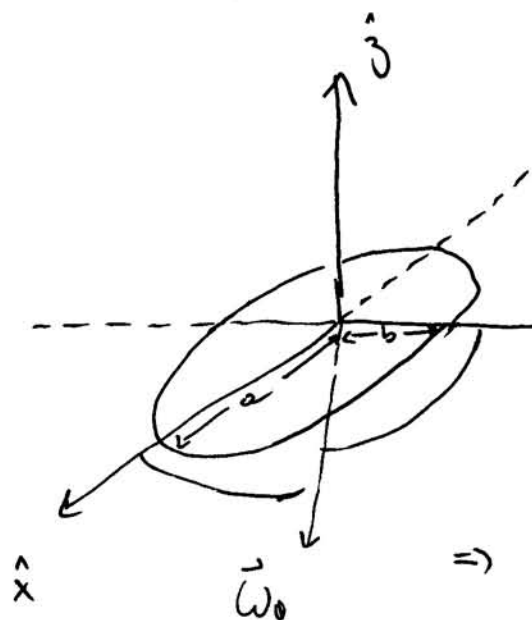
$$(I_x + I_y) \frac{\ddot{\phi}}{2} + m^2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} (I_y - I_x) = 0$$

$$\Rightarrow (I_x + I_y) \frac{\ddot{\phi}}{2} + m^2 \frac{\sin \phi}{2} (I_y - I_x) = 0$$

$$\Rightarrow (I_x + I_y) \ddot{\phi} + m^2 (I_y - I_x) \sin \phi = 0$$

$$\text{con } \dot{\phi}(0) = 0 \quad (\omega_z(0) = 0)$$

$$\phi(0) = \pi/2$$



$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{m^2(I_y - I_x) \sin \phi}{(I_x + I_y)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = - \frac{m^2(I_y - I_x) \sin \phi}{(I_x + I_y)}$$

$$\Rightarrow d\dot{\phi} \dot{\phi} = - \frac{m^2(I_y - I_x) \sin \phi}{(I_x + I_y)} d\phi \quad \Bigg/ \int$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = + m^2 \frac{(I_y - I_x) \cos \phi}{(I_x + I_y)} \Bigg|_{\pi/2}^{\phi}$$

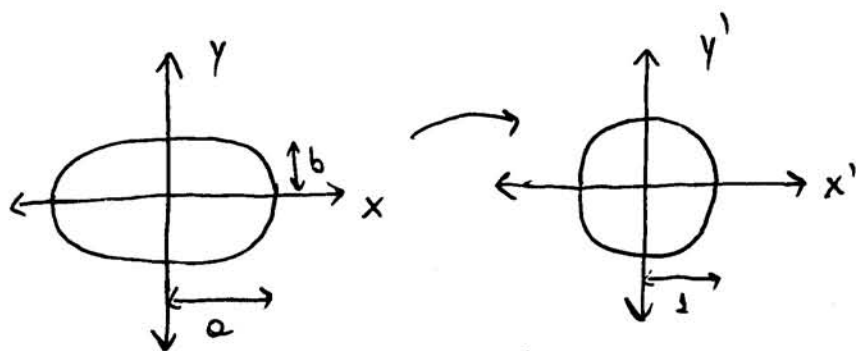
$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = m^2 \frac{(I_y - I_x) \cos \phi}{(I_x + I_y)}$$

Antes de continuar:

$$I_x = \sigma \int y^2 dx dy$$

$$\text{con } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \gamma \quad \sigma = \frac{M}{\pi ab}$$

$$I_y = \sigma \int x^2 dx dy$$



$$\begin{aligned} x &= ax' \\ y &= by' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_x &= \frac{M}{\pi ab} \int b^2 y'^2 \cdot a dx' b dy' \\ &= \frac{M b^2}{\pi} \int y'^2 dx' dy' \end{aligned}$$

De igual forma:

$$I_y = \frac{Ma^2}{\tilde{I}} \underbrace{\int x'^2 dx' dy'}_{I_z}$$

Notar que:  $I_1 + I_2 = \int x'^2 + y'^2 dx' dy' = I$  ( $I_1 = I_2$ )  $\Rightarrow I_1 = \frac{I}{2}$   
por simetría  $I_2 = \frac{I}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\tilde{r}} \int_0^{2\pi} r'^2 r' dr' d\theta'$$
$$= 2\tilde{I} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\tilde{I}}{2}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{Mb^2}{4}; \quad I_y = \frac{Ma^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{m^2 \cancel{(M/4)} (a^2 - b^2) \cos \phi}{\cancel{(M/4)} (a^2 + b^2)} \quad , \text{ pero}$$

$$= m^2 \frac{(a^2 - b^2) \cos \phi}{(a^2 + b^2)}$$

$$\text{sea } \Omega^2 = \frac{m^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = 2\Omega^2 \cos \phi$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \Omega \sqrt{2 \cos \phi}$$

$$\frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi}} = dt \cdot \Omega \cdot \sqrt{2}$$

tpo en que  
vuelve a pasar

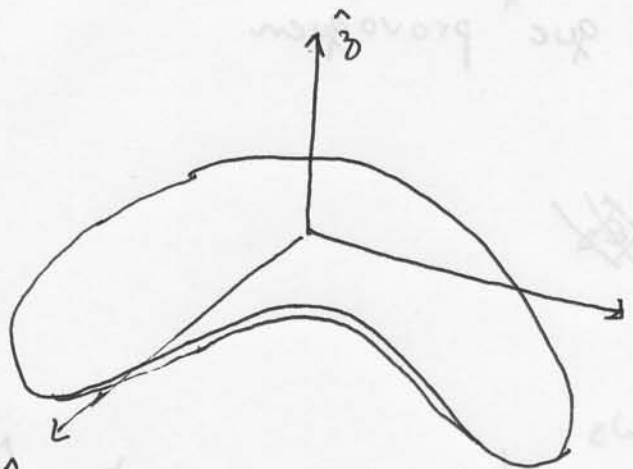
$$\Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\tilde{I}}{2}, \frac{3\tilde{I}}{2}$$

pero  $\sqrt{\cos \phi} \in [-\frac{\tilde{I}}{2}, \frac{\tilde{I}}{2}]$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}} = \cancel{\Omega} \Omega \sqrt{2} T$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}} = \Omega \sqrt{2} T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{\Omega \sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}}$$



Un boomerang plano se lanza al aire rotando inicialmente con velocidad angular  $\vec{\omega}(t=0)$

tg:

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{z} + \omega_0 \sqrt{3} \hat{y}$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes principales  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  son conocidos y valen  $I_x = 2I_0$ ,  $I_y = I_0$   
 $I_z = I_x + I_y = 3I_0$   
 Calcule  $\vec{\omega}(t)$ .

Ecs. de Euler:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) = \tau_{1 \text{ (cm)}}^{\text{ext}}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) = \tau_{2 \text{ (cm)}}^{\text{ext}}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) = \tau_{3 \text{ (cm)}}^{\text{ext}}$$

Cuando el cuerpo no está bajo la acción de fuerzas externas

$$\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) = 0 \quad (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 2I_0 \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (3I_0 - I_0) = 0 \Rightarrow 2\dot{\omega}_x + 2\omega_y \omega_z = 0$$

$$I_0 \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (2I_0 - 3I_0) = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x = 0$$

$$3I_0 \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_0 - 2I_0) = 0 \Rightarrow 3\dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y = 0$$

sistema de 3 ecs. y 3 incógnitas

Antes de ponerse a integrar veamos qué ocurre con un sólido libre de fuerzas externas que provoquen torque.

~~$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3$$~~

$$(1) \cdot \omega_1 + (2) \cdot \omega_2 + (3) \cdot \omega_3$$

$$\Rightarrow I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3$$

$$+ \omega_2 \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_2) + \omega_1 \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3) + \omega_1 \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_1) = 0$$

$$\Rightarrow I_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_1^2}{2} \right) + I_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_2^2}{2} \right) + I_3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_3^2}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = \text{cte.}$$

Quando no hay torque:

$$\Rightarrow \vec{L}^{\text{ep}} = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \text{cte.}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \cdot 2 I_0 \omega_1^2 + I_0 \omega_2^2 + 3 I_0 \omega_3^2 &= 2 I_0 \cancel{\omega_0^2} + I_0 \omega_0^2 \cdot 3 + 3 I_0 \omega_0^2 \\ &= 6 I_0 \cdot \omega_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 4 I_0^2 \omega_1^2 + I_0^2 \omega_2^2 + 9 I_0^2 \omega_3^2 &= I_0^2 \cdot 3 \omega_0^2 + 9 I_0^2 \omega_0^2 \\ &= 12 \omega_0^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \omega_1^2 + \omega_2^2 + 3 \omega_3^2 = 6 \omega_0^2 \quad (1)$$

$$4 \omega_1^2 + \omega_2^2 + 9 \omega_3^2 = 12 \omega_0^2 \quad (2)$$

(2)-(1):

$$2\omega_x^2 + 6\omega_z^2 = 6\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega_z = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_x^2}{3}}$$

$$\frac{d\omega_x}{\left(1 - \frac{\omega_x^2}{3\omega_0^2}\right)\omega_0^2}$$

C.V:  $u = \frac{\omega_x}{\sqrt{3}\omega_0}$

$$\Rightarrow du = \frac{d\omega_x}{\sqrt{3}\omega_0}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\omega_x} \frac{\sqrt{3}\omega_0 du}{(1-u^2)\omega_0^2}$$

(2)-2.(1):

$$-\omega_y^2 + 3\omega_z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_y = \sqrt{3}\omega_z = \sqrt{3} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_x^2}{3}}$$

$$(1) \Rightarrow \dot{\omega}_x = -\omega_y \omega_z$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_x = -\sqrt{3} \left( \omega_0^2 - \frac{\omega_x^2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega_x}{dt} = -\sqrt{3} \left( \omega_0^2 - \frac{\omega_x^2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega_x}{\left( \omega_0^2 - \frac{\omega_x^2}{3} \right)} = -\sqrt{3} dt$$

$$\int_{\omega_x(0)}^{\omega_x(t)} = \int_0^t$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\omega_0} \operatorname{arctanh} u \Big|_0^u = -\sqrt{3} \cdot t$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctanh} u = -\omega_0 \cdot t$$

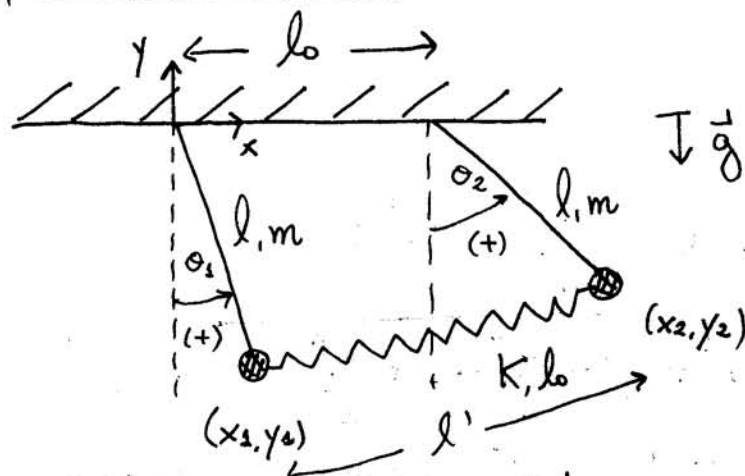
$$\Rightarrow u = \tanh(-\omega_0 \cdot t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_x = -\sqrt{3}\omega_0 \cdot \tanh(\omega_0 \cdot t)}$$



# Pequeñas Oscilaciones

1/7



$$x_1 = l \sin \theta_1$$

$$y_1 = -l \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_0 + l \sin \theta_2$$

$$y_2 = -l \cos \theta_2$$

Nota:  $\theta_1$  y  $\theta_2$  pueden ser positivos y negativos

Estudiamos las peg. oscilaciones del sistema en torno al eq. natural  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

Rápidamente podemos ver que el lagrangeano es:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 + mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2 - \frac{1}{2} K (l' - l_0)^2$$

$$\text{con } l' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \left[ (l_0 + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow l' = l \left[ (l_0/l + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \frac{K}{2} \left( l \left[ (l_0/l + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2} - l_0 \right)^2$$

Ahora que tenemos el lagrangeano normal, encontremos el lagrangeano de peg. oscilaciones

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_1^{eq} + \tilde{\theta}_1, \quad |\tilde{\theta}_1| \ll 1$$

$$\theta_2 = \theta_2^{eq} + \tilde{\theta}_2, \quad |\tilde{\theta}_2| \ll 1$$

$$\text{pero } \theta_1^{eq} = 0 = \theta_2^{eq}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \tilde{\theta}_1$$

$$\theta_2 = \tilde{\theta}_2$$

Por notación sigamos trabajando con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  pero 2/7  
 sujeto a:  $|\theta_1| \ll 1$   
 $|\theta_2| \ll 1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} \left[ l \sqrt{\left( \frac{l}{l} + \theta_2 - \theta_1 \right)^2 + \left( 1 - \frac{\theta_2^2}{2} - 1 + \frac{\theta_1^2}{2} \right)^2} - l_0 \right]^2$$

ya que:  $\sin \theta \approx \theta$  y  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  cuando  $|\theta| \ll 1$ .

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} \left[ l \sqrt{\left( \frac{l}{l} + \theta_2 - \theta_1 \right)^2 + \underbrace{\left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right)^2}_{(*)}} - l_0 \right]^2$$

El lagrangeano de peq. oscilaciones sólo debe tener términos de hasta orden 2. Notar que el término (\*) es de orden 4, es por esto que lo descartamos. (aunque esté dentro de la raíz, luego participa cuando se eleva al cuadrado)

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} [l(\frac{l}{l} + \theta_2 - \theta_1) - l_0]^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{m g l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{k}{2} l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + 2 m g l$$

Además, debido a que las ecs. de mov ó de Lagrange provienen de derivar el lagrangeano c/r a  $\dot{\theta}_i$  y  $\theta_i$  la cte.  $2 m g l$  la podemos eliminar, obteniéndose:

$$\mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{m g l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{k l^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 = \sum_{i,j} \left( \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{V_{ij}}{2} q_i q_j \right)$$

Reconozcamos las matrices  $K_{ij}$ ,  $V_{ij}$ .

3/7

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + 0 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 0 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2$$

$$\Rightarrow K_{ij} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow mgl \left( -\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{b}{2} l^2 (\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) &= -\theta_1^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad - \theta_2^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad + bl^2 \theta_1 \theta_2 \rightarrow \text{término simétrico} \\ &= \theta_1^2 \cdot - \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) - \theta_2^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{bl^2}{2} \theta_1 \theta_2 + \frac{bl^2}{2} \theta_2 \theta_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ij} = \begin{bmatrix} (mgl + bl^2) & -bl^2 \\ -bl^2 & (mgl + bl^2) \end{bmatrix}$$

¿Que hay sobre las ecs. de mov?

Notar que  $\mathcal{L}^{[2]} = \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{V_{ij}}{2} q_i q_j$

permite que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^{[2]}}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 0 \quad \text{Sean:}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \delta_{ib} \dot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \delta_{jb} \right\} - \left\{ \sum_{i,j} \frac{V_{ij}}{2} \delta_{ib} q_j + \sum_{i,j} \frac{V_{ij}}{2} q_i \delta_{jb} \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_j \frac{K_{jb}}{2} \dot{q}_j + \sum_i \frac{K_{ib}}{2} \dot{q}_i \right\} - \left\{ \sum_j \frac{V_{jb}}{2} q_j + \sum_i \frac{V_{ib}}{2} q_i \right\} = 0$$

podemos renombrar  $i \rightarrow j$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j \frac{K_{jj}}{2} \dot{q}_j + \sum_j \frac{K_{jj}}{2} \dot{q}_j \right\} - \left\{ -\sum_j \frac{V_{jj}}{2} \dot{q}_j - \sum_j \frac{V_{jj}}{2} \dot{q}_j \right\} = 0$$

pero además al dejar  $\mathcal{L}^{[2]}$  de orden 2 nos garantizamos que  $K_{ij}$  y  $V_{ij}$  son simétricos

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j K_{jj} \dot{q}_j \right\} + \sum_j V_{jj} \dot{q}_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j (K_{jj} \ddot{q}_j + V_{jj} \dot{q}_j) = 0$$

en nuestro caso

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución a este sistema de ecuaciones?

Estamos en búsqueda de las coord. normales o modos propios de oscilación del sistema, para esto podemos suponer que oscilan con la misma frecuencia pero con distinta amplitud.

para esto suporemos:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

↓  
indep del tiempo, son amplitudes que se despegan con las cond. iniciales

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debemos resolver para  $\omega$ :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \det IM = 0$$

$$\det IM = 0 \Rightarrow$$

$$(-ml^2\omega^2 + mgl + bl^2)^2 - b^2l^2 = 0$$

$$\Rightarrow -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 = \pm bl$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} = \pm \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{b}{m} \mp \frac{b}{m}}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2b}{m}}}$$

frec. de oscilación "naturales"  
del sistema

Ahora calculemos los modos de oscilación:

si tomamos  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  y reemplazamos en (\*)

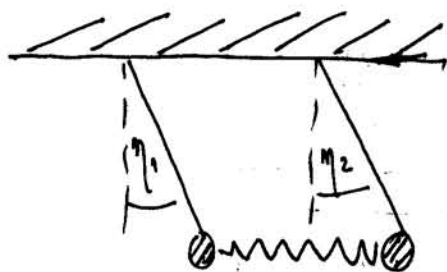
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 &= 0 \\ -\eta_2 + \eta_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = \eta_2}$$

$\Rightarrow$  oscilación "sincronizada"



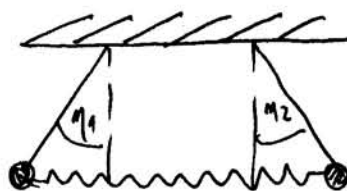
si tomamos  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g+2b}{l}}$  en (\*)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} - \frac{2b}{m} + \frac{b}{m} + \frac{g}{l} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{g}{l} - \frac{2b}{m} + \frac{b}{m} + \frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = -\eta_2}$$

$\Rightarrow$  oscilación "contraria"



Entonces:

→ Para oscilación "sincronizada" la solución es:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega_1 t} = \begin{pmatrix} \eta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)\right) \\ \eta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)\right) \end{pmatrix}$$

→ Para oscilación "contraria":

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)\right) \\ \eta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)\right) \end{pmatrix}$$

Debido al principio de superposición de soluciones (EDO) obtenemos que la solución general es:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)\right) - \eta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)\right) \\ \eta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)\right) + \eta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)\right) \end{pmatrix}$$