

PAUTA EJERCICIO 3

Sistemas Dinámicos

Profesor: René Rojas

Auxiliares: Sebastián Díaz, Sergio Godoy

El Lagrangeano del sistema

Energía Cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energía Potencial:

$$V = \frac{1}{2} k (x_1 - l)^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - l)^2 + \frac{1}{2} k [(3l - x_1 - x_2) - l]^2$$

Finalmente:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - l)^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - l)^2 - \frac{1}{2} k [(3l - x_1 - x_2) - l]^2$$

Posición de Equilibrio

En la posición de equilibrio el potencial debe satisfacer: $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) = \vec{0}$

Se obtiene así un sistema de ecuaciones para x_1, x_2 :

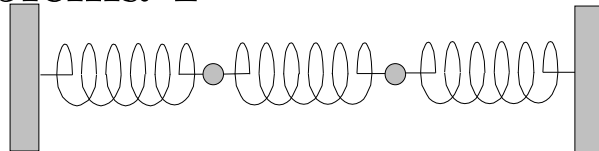
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k(2x_1 - 3l + x_2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(2x_2 - 3l + x_1) = 0$$

cuya solución es $x_1 = x_2 = l$. Esto quiere decir que en la posición de equilibrio, los 3 resortes se encuentran en su largo natural, como era de esperarse.

En las páginas siguientes se resuelven las partes que faltan, pero considerando que el resorte del centro tiene una constante elástica k_l . Simplemente cambien k_l por k para obtener los resultados del ejercicio que les tomamos.

Problema 1



Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

De allí las matrices \mathbf{K} y \mathbf{V} son

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo cual los valores propios satisfacen

$$\det \left(\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

o bien

$$\omega^4 m^2 - 2\omega^2 mk - 2\omega^2 mk_1 + k^2 + 2kk_1 = 0,$$

de donde resultan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}.$$

El sistema de ecuaciones lineales es

$$\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \frac{(k + k_1)}{m})a_1 &= -\frac{k_1}{m}a_2, \\ a_1 &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{(\omega^2 - \frac{(k + k_1)}{m})}a_2,\end{aligned}$$

y para las dos frecuencias propias resulta

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \frac{(k+k_1)}{m}\right)} a_{21} = a_{21}, \\ a_{12} &= -\frac{\frac{k_1}{m}}{\left(\frac{k+2k_1}{m} - \frac{(k+k_1)}{m}\right)} a_{22} = -a_{22}. \end{aligned}$$

Normalización requiere que $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{I}$, por lo cual

$$m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = I,$$

entonces $2ma_{11}^2 = 1$ y $2ma_{22}^2 = 1$, obteniendo

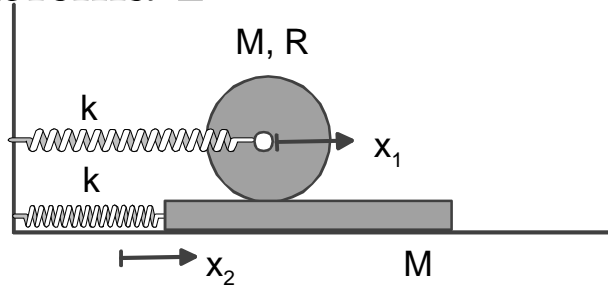
$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

También indicaremos los modos normales $\boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}$ que resultan ser

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2), \\ \varsigma_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (-x_1 + x_2). \end{aligned}$$

El factor $\sqrt{\frac{m}{2}}$ es irrelevante.....

Problema 2.



Tenemos

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R} \\ K &= \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 \\ &= \frac{3}{4} M \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} M (\dot{x}_1 \dot{x}_2) + \frac{3}{4} M \dot{x}_2^2 \\ V &= \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \end{aligned}$$