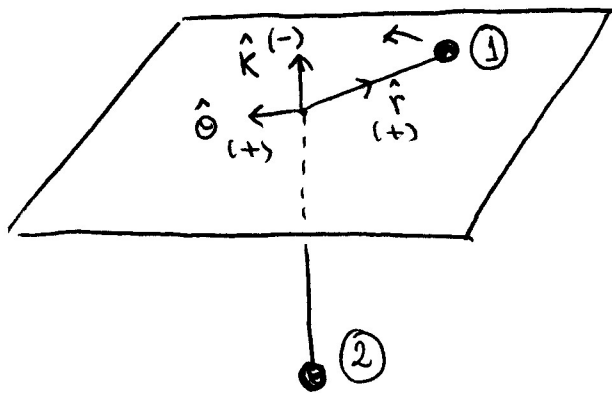


# Problema Ej. 1



$\downarrow \vec{g}$

⊛ Partícula 1 tiene libertad de moverse sobre el plano  $\Rightarrow$  2 grados libertad:  $r, \theta$

⊛ Partícula 2 sólo sube o baja  $\Rightarrow$  1 grado de libertad:  $z$

Debido a que existe cuerda uniendo a ambas partículas tenemos que  $r+z=l=\text{cte.}$  (Lo que  $z$  es cantidad positiva hacia abajo.). Con esto, de 3 grados de lib  $\rightarrow$  2

$$r+z=l \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -\dot{z}}$$

Entonces:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2$$

$$V = -m_2 g z = -m_2 g (l-r)$$

$\downarrow$   
 $z$  es positivo siempre por def. coord.

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + m_2 g r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Ec. E-L}}$$

$$\underline{r} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2) \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g \quad (1)$$

$$\underline{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = cte$$

$$y \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta} = P_\theta \quad (2)$$

Tenemos  $P_\theta = cte = m_1 r^2 \dot{\theta}$  cantidad conservada. Es el momentum generalizado asociado a la variable  $\theta$ , la cual recibe el nombre de "variable cíclica" por no aparecer en el Lagrangeano. El sistema es invariante frente a desplazamientos virtuales en  $\theta$ .

Además,  $L$  indep. de  $t \Rightarrow$  se conserva energía.

de la ecuación (2)

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_{\theta}}{m_1 r^2}$$

en (1)

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{r} = m_1 r \frac{P_{\theta}^2}{m_1^2 r^4} - m_2 g$$

$$\Rightarrow \boxed{(m_1 + m_2) \ddot{r} = \frac{P_{\theta}^2}{m_1 r^3} - m_2 g}$$

Ec. de  
mov

↓  
término "centrífugo"  
• barrera centrífuga.

↓  
peso

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2) \dot{r} = P_r \rightarrow \text{momentum generalizado "r"}$$

$$\rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{(m_1 + m_2)}$$

$$H = P_r \cdot \dot{r} + P_{\theta} \cdot \dot{\theta} - L$$

$$= P_r \cdot \frac{P_r}{(m_1 + m_2)} + P_{\theta} \cdot \frac{P_{\theta}}{m_1 r^2} - \frac{1}{2} m_1 \frac{P_r^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{P_{\theta}^2}{m_1^2 r^4}$$

$$- \frac{1}{2} m_2 \frac{P_r^2}{(m_1 + m_2)^2} - m_2 g (l - r)$$

$$= \frac{P_r^2}{(m_1 + m_2)} + \frac{P_{\theta}^2}{m_1 r^2} - \frac{P_r^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{P_{\theta}^2}{2 m_1 r^2} - m_2 g (l - r)$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_r^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{P_\theta^2}{2m_1 r^2} - m_2 g(l-r)$$

$$\bullet \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{P}_r$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{P_\theta^2}{m_1 r^3} + m_2 g$$

$$\Rightarrow \dot{P}_r = \frac{P_\theta^2}{m_1 r^3} - m_2 g$$

$$\bullet \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{P}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \dot{P}_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{P_\theta = \text{cte.}}$$