6.4. Limite continuo

Deseamos estudiar lo que sucede si hacemos $N \to \infty$, $a \to 0$, y las masas tender a cero de modo que

$$\frac{m}{a} \to \sigma,$$

siendo σ una constante llamada la densidad lineal de masa. La ecuación de movimiento

$$\ddot{y}_i = \frac{\tau}{ma}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i),$$

pasará a ser dependiente de una variable continua en la posición

$$y_i \to y(x,t),$$

siendo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\to y(x+a,t) = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2, \\ y_{i-1} &\to y(x-a,t) = y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2, \end{aligned}$$

de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) &= \frac{\tau}{ma}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}a^2 \\ &= \frac{a\tau}{m}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

y finalmente, la llamada ecuación de onda para la cuerda elástica con masa uniforme:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\sigma}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

6.5. Soluciones de la ecuación de onda

La última ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{6.5}$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}},$$

representa, como veremos, la velocidad de propagación de la onda.

▶ TEOREMA 6.1
Las soluciones de la ecuación de onda (6.5) son

$$y(x,t) = F(x+vt) + G(x-vt),$$

con F y G funciones arbitrarias de una variable.

DEMOSTRACION 2
Si cambiamos a variables $\zeta = x+vt$, $\psi = x - vt$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi} \\
&= \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \psi} \\
&= v\frac{\partial}{\partial \zeta} - v\frac{\partial}{\partial \psi},
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi} \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + v^2\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2v^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4v^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \psi}.$$

Entonces, en estas variables, la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \psi} = 0,$$

que es trivial integrar obteniendo

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = f(\zeta),$$

y

$$\begin{aligned}
y &= F(\zeta) + G(\psi) \\
&= F(x+vt) + G(x-vt).
\end{aligned}$$

Las soluciones anteriores corresponden a una forma invariable que se propaga hacia la derecha $G(x - vt)$ o hacia la izquierda $F(x + vt)$ con velocidad constante $v = \sqrt{\tau/\sigma}$. Sin embargo en una cuerda, debemos hacer consideraciones adicionales pues debemos satisfacer por ejemplo que $y(0,t) = y(L,t) = 0$ en el caso de extremos fijos.

6.5.1. Condiciones de frontera

Supongamos que queremos resolver la ecuación de onda sujeta a las condiciones anteriores de extremos fijos $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

Método de separación de variables

Suponga una solución de la forma

$$y(x,t) = X(x)G(t),$$

entonces si se sustituye se obtiene.

$$X(x)G''(t) - v^2 X''(x)G(t) = 0$$

o bien

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)},$$

de modo que cualquiera de los lados no puede ser función ni de x ni de t, por lo tanto

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

de donde el signo se ha elegido de modo de tener soluciones oscilatorias

$$G(t) = Ce^{\pm i\omega t}$$

y

$$X(x) = De^{\pm ikx}$$

donde hemos llamado

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Para satisfacer las condiciones de frontera debemos tomar

$$X(x) = D \sin kx,$$

con

$$\sin kL = 0,$$

de modo que hay un número discreto de valores de k permitidos, es decir

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ con } n = 1, 2, 3 \cdots$$

de ese modo, la solución general, que satisface las condiciones de frontera es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + D_n^- e^{-i\frac{n\pi}{L}vt}) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

6.5.2. Condiciones iniciales

La determinación completa de los coeficientes D_n requiere de conocer la forma inicial del hilo y su velocidad inicial, es decir supondremos conocidos

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x), \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x). \end{aligned}$$

Considerando esto se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^+ + D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{n\pi}{L} v(D_n^+ - D_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Pero las funciones $\sin n\pi x/L$ son ortogonales en el intervalo $(0, L)$ de modo que podemos despejar

$$\begin{aligned} D_n^+ + D_n^- &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ D_n^+ - D_n^- &= -\frac{2i}{n\pi v} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
D_n^+ &= \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx - \frac{i}{n\pi v}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{1}{L}F_n - \frac{i}{n\pi v}V_n \\
D_n^- &= \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{i}{n\pi v}\int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{1}{L}F_n + \frac{i}{n\pi v}V_n,
\end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
F_n &= \int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
V_n &= \int_0^L V(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.
\end{aligned}$$

Así finalmente la solución es

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1}{L}F_n - \frac{i}{n\pi v}V_n)e^{i\frac{n\pi}{L}vt} + \\
&\quad (\frac{1}{L}F_n + \frac{i}{n\pi v}V_n)e^{-i\frac{n\pi}{L}vt})\sin\frac{n\pi x}{L},
\end{aligned}$$

que se reduce a

$$y(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(F_n\cos\frac{n\pi}{L}vt + \frac{L}{n\pi v}V_n\sin\frac{n\pi}{L}vt)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{6.6}$$

Caso particular, la cuerda parte del reposo

Para este caso, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos\frac{n\pi vt}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \\
F_n &= \int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.5.1 *Demuestre que el resultado anterior puede escribirse:*

$$y(x,t) = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+vt)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-vt)\right)\right)$$

o sea, tal como se establece en el teorema. Y además que

$$y(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin n\pi\frac{x}{L}\cos n\frac{\pi}{L}vt$$

6.6. Método de las series de Fourier

Todas las funciones que se anulan en $x=0$, $x=L$ pueden expandirse en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'$$

de modo que la solución de la ecuación de onda para la cuerda con extremos fijos puede expandirse así

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

que al sustituir en la ecuación de onda da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L} + v^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = 0,$$

de donde por la independencia de las funciones base se obtiene

$$b_n''(t) + \frac{v^2n^2\pi^2}{L^2}b_n(t) = 0,$$

con soluciones

$$b_n(t) = A_n\cos\frac{vn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{vn\pi}{L}t$$

de modo que

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Para tomar en cuenta las condiciones iniciales considere

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{vn\pi}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ B_n &= \frac{2}{vn\pi} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

o sea se ha obtenido el mismo resultado de (6.6)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{6.7}$$

Esta se denomina la solución de Benouilli.

6.7. Consideraciones adicionales

Podemos insistir en tratar de satisfacer las condiciones iniciales y de frontera en una cuerda con extremos fijos usando la forma más general

$$y(x,t) = F_1(x+vt) + F_2(x-vt).$$

6.7.1. Condiciones iniciales.

Cuerda parte del reposo.

Para tener un problema más simples, imaginemos que la cuerda parte del reposo. Entonces debemos imponer

$$\begin{aligned}
y(x,0) &= F(x) = F_1(x) + F_2(x), \\
\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 = vF_1'(x) - vF_2'(x), \\
y(0,t) &= F_1(vt) + F_2(-vt) = 0, \\
y(L,t) &= F_1(L+vt) + F_2(L-vt) = 0.
\end{aligned}$$

La tercera impone que

$$F_2(x) = -F_1(-x),$$

de modo que tenemos que satisfacer

$$\begin{aligned}
F(x) &= F_1(x) - F_1(-x), \\
0 &= vF_1'(x) - vF_1'(-x), \\
y(L,t) &= F_1(L+vt) - F_1(-L+vt) = 0.
\end{aligned}$$

si la segunda se integra respecto x se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= F_1(x) + F_1(-x) - 2F_1(0) \\
F(x) &= F_1(x) - F_1(-x),
\end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}F(x), \\
F_1(-x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}\left(-F(x)\right).
\end{aligned}$$

ambas son compatibles si

$$F(x) = -F(-x)$$

lo cual requiere extender el rango de definición de F de modo que ella sea impar. Luego la solución puede escribirse

$$\begin{aligned} y(x,t) &= F_1(x+vt) - F_1(-(x-vt)) \\ &= \frac{1}{2}\left(F(x+vt) + F(x-vt)\right). \end{aligned}$$

La última condición es $y(L,t) = 0$ de modo que

$$F(L+vt) + F(L-vt) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= -F(-x) \\ F(L+x) &= -F(L-x) \end{aligned}$$

o sea basta extender el rango de definición de F de modo que sea impar y periódica con periodo $2L$. Así la solución queda expresada en términos de la forma inicial de la cuerda $F(x)$, extendida periódicamente a una función impar de periodo $2L$.

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x+vt) + F(x-vt)\right).$$

De este modo, en un punto fijo x la oscilación es periódica con periodo T dado por

$$vT = 2L,$$

o sea

$$T = \frac{2L}{v}.$$

Caso general, solución de D'Alembert

Ahora las condiciones iniciales y de contorno son las siguientes

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x) = F_1(x) + F_2(x), \\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= V(x) = vF_1'(x) - vF_2'(x), \\ y(0,t) &= F_1(vt) + F_2(-vt) = 0, \\ y(L,t) &= F_1(L+vt) + F_2(L-vt) = 0. \end{aligned}$$

La tercera impone que

$$F_2(x) = -F_1(-x),$$

y la cuarta

$$F_1(L + x) = -F_2(L - x),$$

Además tenemos que satisfacer

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x) - F_1(-x), \\ V(x) &= vF_1'(x) - vF_1'(-x), \end{aligned}$$

si la segunda se integra respecto x se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^x V(x)dx &= vF_1(x) + vF_1(-x) - 2vF_1(0) \\ vF(x) &= vF_1(x) - vF_1(-x), \end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_1(0) + \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x V(x)dx, \\ F_1(-x) &= F_1(0) - \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x V(x)dx. \end{aligned}$$

ambas son compatibles si

$$F(x) = -F(-x),$$

y

$$V(x) = -V(-x),$$

lo cual requiere extender el rango de definición de F y V de modo que ellas sean impares. Luego la solución puede escribirse

$$\begin{aligned} y(x,t) &= F_1(x + vt) - F_1(-(x - vt)) \\ &= \frac{1}{2}F(x + vt) + \frac{1}{2v}\int_0^{x+vt} V(x)dx - \\ &\quad (-\frac{1}{2}F(x - vt) + \frac{1}{2v}\int_0^{x-vt} V(x)dx) \\ &= \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} V(x)dx. \end{aligned}$$

Donde las condiciones de contorno $y(L,t)=0$, $y(0,t)=0$ se satisfacen si

$$\begin{aligned} F(x) &= -F(-x), \\ V(x) &= -V(-x), \end{aligned}$$

y son de periodo $2L$.

EJEMPLO 6.7.1 *Si la forma inicial fuera una semi sinusoide*

$$F(x) = A\sin\frac{\pi x}{L}$$

esta función es de antemano impar y de periodo $2L$. Entonces

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{A}{2}\left(\sin\frac{\pi(x+vt)}{L}+\sin\frac{\pi(x-vt)}{L}\right) \\ &= A\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}vt. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.7.2 *En general, una extensión impar y de periodo $2L$ de $F(x)$ es*

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\sin\frac{n\pi(x+vt)}{L}+\sin\frac{n\pi(x-vt)}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi\frac{x}{L}\cos n\frac{\pi}{L}vt. \end{aligned}$$

6.8. Caso general

Para el caso general donde la forma inicial de la cuerda y su velocidad son dadas, la solución la escribimos

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

siendo

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ B_n &= \frac{2}{vn\pi} \int_0^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.8.1 *Demuestre que si $F(x)$ y $V(x)$ representan extensiones impares y de periodo $2L$ de la forma y de la velocidad inicial de la cuerda, entonces la expresión*

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}(F(x+vt) + F(x-vt)) \\ &\quad + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx \end{aligned}$$

satisface la ecuación de onda y además

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x), \\ \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V(x), \\ y(0,t) &= 0, \\ y(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Esta solución se denomina de D'Alembert. Vea [1].

EJEMPLO 6.8.1 *Si la cuerda parte recta con un perfil de velocidades iniciales*

$$V(x) = V_0 \sin \frac{\pi x}{L},$$

de nuevo $V(x)$ es de antemano impar y de periodo $2L$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(x) dx \\ &= \frac{V_0 L}{\pi v} \sin \frac{\pi}{L} vt \sin \pi \frac{x}{L} \\ &= \frac{V_0 L}{2\pi v} (\cos \pi \frac{x-vt}{L} - \cos \pi \frac{x+vt}{L}). \end{aligned}$$

6.9. Ejemplos

EJEMPLO 6.9.1 *Una cuerda de longitud L con extremos fijos comienza a oscilar partiendo del reposo de manera que su forma inicial es:*

$$F(x) = \begin{cases} Ax/L & si \quad x < L/2 \\ A(1 - x/L) & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

Determine $y(x, t)$.

Solución. La solución será

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

siendo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

donde evaluamos

$$\frac{2}{L} \int_0^{L/2} (Ax/L) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^{L} A(1 - \frac{x}{L}) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

resultando

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 4A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{n^2 \pi^2} \cos \frac{vn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= 4A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \frac{v(2k+1)\pi t}{L} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Esta solución sin embargo dice poco de la forma que tiene la onda. Analicemos la solución de D'Alembert

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(F(x + vt) + F(x - vt)).$$

En la figura siguiente se ilustra la extensión periódica de $F(x)$

De modo que cuando ha transcurrido un tiempo t, $F(x + vt)$ en el rango de su argumento desde $0 \to L$ está remarcado a la derecha y $F(x - vt)$ está remarcado en el rango de su argumento de $0 \to L$ a la izquierda. Ambas

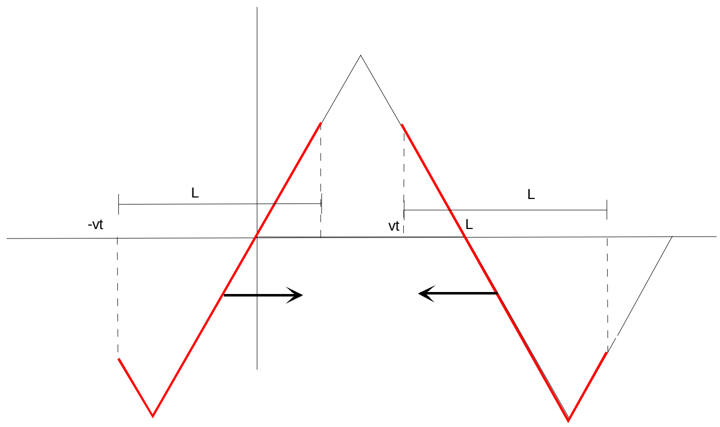

Figura 6.3: Solución de D'Alembert.

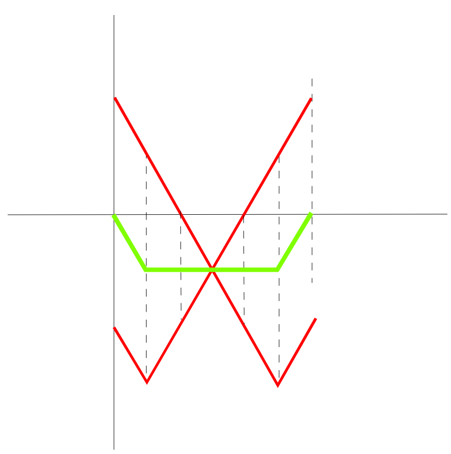

Figura 6.4: Solución de D'Alembert

Problema 3

Tenemos condiciones iniciales

$$y(x,0)=0;\qquad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=5\sin\frac{3\pi x}{L}-2\sin\frac{5\pi x}{L}$$

Podemos usar directamente D'Alembert

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}(5\sin\frac{3\pi u}{L}-2\sin\frac{5\pi u}{L})du\\
&= \frac{1}{2v}\left.(-\frac{L}{3\pi}5\cos\frac{3\pi u}{L}+\frac{L}{5\pi}2\cos\frac{5\pi u}{L})\right|_{x-vt}^{x+vt}\\
&= \frac{L}{2\pi v}\left(-\frac{5}{3}(\cos\frac{3\pi(x+vt)}{L}-\cos\frac{3\pi(x-vt)}{L})+\frac{2}{5}(\cos\frac{5\pi(x+vt)}{L}-\cos\frac{5\pi(x-vt)}{L})\right)\\
&= \frac{L}{2\pi v}\left(-\frac{5}{3}(\cos\frac{3\pi(x+vt)}{L}-\cos\frac{3\pi(x-vt)}{L})+\frac{2}{5}(\cos\frac{5\pi(x+vt)}{L}-\cos\frac{5\pi(x-vt)}{L})\right)\\
&= \frac{5L}{3\pi v}\sin\frac{3\pi vt}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}-\frac{2L}{5\pi v}\sin\frac{5\pi x}{L}\sin\frac{5\pi v}{L}
\end{aligned}$$

O series de Fourier

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi vt}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\\
B_n &= \frac{2}{n\pi v}\int_0^L(5\sin\frac{3\pi x}{L}-2\sin\frac{5\pi x}{L})\sin\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}$$

resultan distintos de cero B_3 y B_5

$$B_3=\frac{5L}{3\pi v},\quad B_5=-\frac{2L}{5\pi v}$$

luego

$$y(x,t)=\frac{5L}{3\pi v}\sin\frac{3\pi vt}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}-\frac{2L}{5\pi v}\sin\frac{5\pi vt}{L}\sin\frac{5\pi x}{L}$$

Si derivamos respecto al tiempo y utilizamos (6.12) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -B_S \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} \\ &= \frac{B_S}{\rho_0}\nabla \cdot \nabla p',\end{aligned}$$

es decir tenemos que las variaciones de la presión p' satisfacen la ecuación de ondas en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 p' = 0, \tag{6.17}$$

donde la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_S}{\rho_0}}.$$

6.13. Ejercicios propuestos

EJERCICIO 6.13.1 *Una cuerda elástica de largo L con extremos fijos parte del reposo con una deformación inicial*

$$y(0,x) = \begin{cases} cx & si \quad x < L/2 \\ 0 & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

Resuelva para $y(x,t)$ en su desarrollo de Fourier. Esquematice cuidadosamente la forma de la onda para $t = T/4$, $T = T/2$, mediante la solución de D'Alembert.

EJERCICIO 6.13.2 *Repita el problema anterior si la cuerda parte tensa con un perfil de velocidades inicial*

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 x/L & si \quad x < L/2 \\ v_0(1 - x/L) & si \quad x > L/2 \end{cases}$$

EJERCICIO 6.13.3 *Obtenga la superposición de las dos ondas*

$$\psi = 2A\sin(kx - \omega t + \pi/4) + A\sin(kx - \omega t).$$

EJERCICIO 6.13.4 *Obtenga una expresión general para la superposición*

$$\psi = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2).$$

EJERCICIO 6.13.5 *Determine la potencia promedio transmitida por la onda del problema anterior.*

EJERCICIO 6.13.6 *Demuestre que si un punto se mueve sobre un plano de manera que sus dos coordenadas varían como*

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t - \alpha), \\ y &= B\cos(\omega t - \beta), \end{aligned}$$

entonces el punto describe una elipse. Determine además la orientación de esa elipse respecto al eje x.

EJERCICIO 6.13.7 *Demuestre que una superposición de ondas de la forma*

$$\psi = \int A_k \sin(kx - \omega(k)t)dk.$$

no satisface la ecuación de ondas a menos que

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

sea constante. Esto naturalmente cuestiona el hecho de superponer ondas que no satisfacen una ecuación lineal. Las situaciones físicas donde se forman grupos son complejas y están fuera del alcance de estos apuntes. Vea([1, pag.370])

EJERCICIO 6.13.8 *Demuestre que si v denota la velocidad de fase de una onda armónica y v_g la velocidad de grupo, entonces*

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}.$$

EJERCICIO 6.13.9 *Si $n(\lambda)$ denota el índice de refracción de un material transparente en función de la longitud de onda, demuestre que la velocidad de grupo está dada por*

$$v_g = \frac{c}{n}(1 - \frac{\lambda}{n}n'(\lambda)).$$

Determine la velocidad con que se aleja una estrella si una determinada línea espectral está corrida un 10 % en frecuencia respecto a su valor en reposo.