sP1 La parte (a) es re fácil y resulta

$$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 - R_1^2)$$

Se puede escribir ecuaciones para el movimiento de cada partícula y también para el movimiento de la polea, ellas son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 &= m_1 g - T_1 \\ m_2\ddot{z}_2 &= m_2 g - T_2 \\ \dot{\ell} &= \tau \end{aligned}$$

donde $\ell = I\omega$, mientras que $\tau = R_2\,(T_2 - T_1)$. La tercera ecuación entonces es $I\dot{\omega} = R_2\,(T_2 - T_1)$.
Si se llama z_1 y z_2 a los largos de cuerda que cuelgan a cada lado, entonces $z_1 + z_2$ es constante y además $\dot{z}_2 = R\omega$ mientras que $\dot{z}_1 = -R_2\omega$ (movimiento solidario), y esto se reemplaza en las dos primeras ecuaciones. Si ahora ellas se restan se obtiene $(m_1 + m_2)R_2\omega = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1)$, pero la diferencia de las tensiones es $\dot{\omega}/R_2$ con lo cual finalmente se puede escribir

$$\ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R_2^2}}\,g$$

---

sP2 Se toma sistema de referencia inercial S en la base fija, con eje X horizontal y eje Y vertical hacia arriba mientras que el sistema de referencia no inercial S' con ejes X' paralelo a la superficie inclinada e Y' perpendicular a ella de tal modo que $\hat{\imath} = \hat{\imath}'\cos\alpha + \hat{j}'\sin\alpha$ y $\vec{g} = g(\hat{\imath}\sin\alpha - \hat{j}'\cos\alpha)$. El vector relativo tiene segunda derivada $\ddot{\vec{R}} = a\,(\hat{\imath}'\cos\alpha + \hat{j}'\sin\alpha)$ mientras $\vec{\Omega} = 0$. La fuerza total es la suma de la fuerza del resorte, el peso y la normal, por lo que la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} m\ddot{x}'\hat{\imath}' = \quad & -k\,(x' - D_0)\hat{\imath}' + mg(\hat{\imath}\sin\alpha - \hat{j}'\cos\alpha) + N\hat{j}' \\ & -ma\,(\hat{\imath}'\cos\alpha + \hat{j}'\sin\alpha) \end{aligned}$$

Se ha usado en forma explícita que no hay movimiento en la dirección Y'. La ecuación vectorial conduce a dos ecuaciones escalares. La normal es

$$N = m\,(g\cos\alpha + a\sin\alpha)$$

y x' satisface

$$\ddot{x}' = -k(x' - D_0) + m(g\sin\alpha - a\cos\alpha)$$

cuya solución, antes de imponer condición alguna, es

$$x'(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + D_0 + \frac{g\sin\alpha - a\cos\alpha}{\omega_0^2}$$

Puesto que en el instante inicial la partícula está en reposo se debe tener que $A = 0$. Y para que haya podido estar en equilibrio estático antes de $t = 0$ es necesario que $x'(0) = D_0 + (g/\omega_0^2)\sin\alpha$, lo que determina que $B = (a/\omega_0^2)\cos\alpha$ lo que da que la solución es

$$x' = D_0 + \frac{g\sin\alpha - a\cos\alpha\,(1 - \cos\omega_0 t)}{\omega_0^2}$$

Para que el resorte esté siempre estirado, la fracción a la derecha debe ser siempre positiva, lo que se garantiza si $g\sin\alpha \geq 2a\cos\alpha$, es decir,

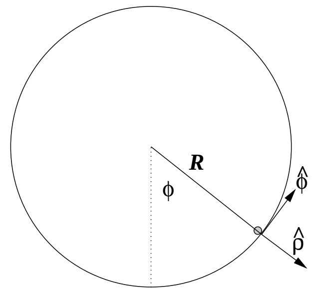
$$2a \leq g\tan\alpha$$

---

sP3 Las fuerzas son, la normal, el peso y el roce estático: $\vec{F}_{\text{tot}} = -N\hat{\rho} + F\hat{\phi} + mg\left(\hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi\right)$ Puesto que se está estudiando el caso en que el cuerpo está pegado a la cinta, $\rho = R$, $\dot{\phi} = \omega_0$ (lo que implica $\phi = \omega_0 t$) y la ecuación de movimiento es $-mR\omega_0{}^2\hat{\rho} = \vec{F}_{\text{tot}}$ que implica que $mR\omega_0^2 = N - mg\cos\omega_0 t$ y también $0 = F - mg\sin\omega_0 t$ y que se puede escribir como (se usará ϕ en lugar de $\omega_0 t$)

$$\begin{aligned} F &= mg\sin\phi \\ N &= mR\omega_0^2 + mg\cos\phi \end{aligned}$$

En el instante inicial la fuerza de roce es nula y, si el cilindro no estuviese rotando, la normal valdría mg.



(a) Para que no se despegue es necesario que la normal sea siempre positiva, esto es

$$\omega_0^2 \geq \frac{g}{R}\,|\cos\phi|$$

Para asegurar que esta relación sea válida en todo instante es necesario que

$$\omega_0^2 \geq \frac{g}{R} \qquad (*)$$

(b) Para que no deslice se debe cumplir que N sea positiva y además que $|F| \leq \mu\,|N|$, es decir,

$$|\sin\omega_0 t| \leq \mu\left|\frac{R\omega_0^2}{g} + \cos\phi\right|$$

Si se cumple (*), la fracción que está dentro del valor absoluto a la derecha es mayor que la unidad, por lo que al lado derecho no es necesario tomar valor absoluto. Si además se considera tan solo $0 \leq \phi \leq \pi$ el seno a la izquierda es positivo, por lo que la desigualdad anterior se puede escribir sin módulos y se reescribe

$$\sin\phi - \mu\cos\phi \leq \mu\,\frac{R\omega_0^2}{g} \qquad (\S)$$

Se sabe que el valor máximo de $A\sin x + B\cos x$ es $\sqrt{A^2 + B^2}$ por lo que el valor máximo del lado izquierdo de la desigualdad es $\sqrt{1 + \mu^2}$ y debe ser menor que el lado derecho, lo que lleva a exigir que

$$\omega_0^2 \geq \frac{g}{R}\,\frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} \qquad (**)$$

que es más fuerte que (*).
Si (*) se satisface como igualdad, es decir, $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, el lado derecho de ecuación (§) vale μ y (§) se cumple como igualdad cuando

$$\sin\phi = \frac{2\mu}{1 + \mu^2}, \qquad \cos\phi = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$$

Estas ecuaciones determinan el ángulo en el cual el cuerpo deja de moverse solidariamente con la superficie.
Si $\mu = \sqrt{3}$ se obtiene $\cos\phi = -\frac{1}{2}$ es decir, $\phi = \frac{2\pi}{3}$ que corresponde a 120°. En este ángulo deja de haber roce estático. Se comprueba que en esta posición $N = \frac{mg}{2}$ que es positiva, por lo que el cuerpo continua pegado a la superficie y comienza a deslizar.