Pauta Ejercicio 1

Parte (a)

Siguiendo la indicación, escribimos el vector posición de la masa m como: $\vec{r}(t) = R\hat{\rho} + L(t)\hat{\phi}$, y además, $L(t) = L_0 - R\phi(t)$. Luego, de esta última expresión obtenemos: $\dot{L} = -R\dot{\phi}$ y $\ddot{L} = -R\ddot{\phi}$. Con esto:

$$\dot{\vec{r}} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{L}\hat{\phi} - L\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = -L\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -\dot{L}\dot{\phi}\hat{\rho} - L\ddot{\phi}\hat{\rho} - L\dot{\phi}^2\hat{\phi}.$$

Ahora: $\sum F = -T\hat{\phi}$, con lo que:

$$\phi) - T = -mL\dot{\phi}^2$$

$$\rho) 0 = -\dot{L}\dot{\phi} - L\ddot{\phi}$$

$$\rho) \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(L\dot{\phi}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad L\dot{\phi} = cte$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L\dot{L}}{R} = cte.$$

Ahora miramos las condiciones iniciales: $L(0)\dot{L}(0) = L_0(-R\dot{\phi}(0)) = -L_0 R\frac{V_0}{L_0} = -V_0 R$
Por lo tanto:

$$L\dot{L} = V_0 R \quad \Rightarrow \quad \dot{L} = \frac{-V_0 R}{L} \tag{1}$$

Nota: Se vé claramente que de (1) se puede obtener L(t), pero no es lo que se pide.

Parte (b)

Basta tener (1) y reemplazar los valores de L y $\dot{L}$:

$$-R\dot{\phi} = \frac{-V_0 R}{L_0 - R\phi} \tag{2}$$

Parte (c)

Teníamos que:

$$T = mL\dot{\phi}^2 \tag{3}$$

Ahora, el punto crucial es que, para encontrar el valor de ϕ cuando la cuerda se corta, en vez de imponer T=0, debe imponerse $T = T_{max}$. Con esto, sólo es necesario reemplazar (2) en (3) y despejar ϕ^*.

$$T_{max} = mL\dot{\phi^*}^2$$

$\Rightarrow$

$$T_{max} = m(L_0 - R\phi^*)\frac{V_0^2}{(L_0 - R\phi^*)^2}$$

$\Rightarrow$

$$L_0 - R\phi^* = m\frac{V_0^2}{T_{max}}$$

$\Rightarrow$

$$\phi^* = \frac{1}{R}(L_0 - \frac{mV_0^2}{RT_{max}})$$

/k.h.v.