

Pauta Control 3
Gabriel Cuevas
21/09/2006

1. Problema 1.

Debemos encontrar la energía potencial (U) de la partícula. Nos fijaremos como potencial gravitatorio nulo ($U_g = 0$) el centro de la circunferencia. Es así como:

$$U = U_{gravitatorio} + U_{elastico}$$

$$U_g = mgR \sin(\phi)$$

$$U_e = \frac{1}{2}k(\Delta - R)^2$$

Debemos calcular el valor de Δ para tener completamente descrita la expresión anterior. Para esto, utilizando el teorema del coseno se tiene que:

$$\Delta^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = 2R^2(1 - \sin(\phi))$$

Por lo tanto:

$$U = mgR \sin(\phi) + \frac{R^2}{2}k\left(\sqrt{2(1 - \sin(\phi))} - 1\right)^2$$
$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = mgR \cos(\phi) + \frac{kR^2}{2}\left(-2\cos(\phi) + \frac{\sqrt{2}\cos(\phi)}{\sqrt{1 - \sin(\phi)}}\right)$$

Para que $\phi = 0$ sea un punto de equilibrio se debe cumplir que:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi}_{\phi=0} = 0$$
$$\Rightarrow mgR + \frac{kR^2}{2}(-2 + \sqrt{2}) = 0$$

De esta última expresión despejamos k :

$$k = \frac{2mg}{(2 - \sqrt{2})R}$$

2. Ahora calculamos la segunda derivada para ver si el punto de equilibrio es estable y además para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = -mgR \sin(\phi) + \frac{kR^2}{2}\left(2\sin(\phi) + \sqrt{2}\left(\frac{-\sin(\phi)}{\sqrt{1 - \sin(\phi)}} + \frac{\cos(\phi)^2}{2(1 - \sin(\phi))^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

Ahora evaluamos en el punto de equilibrio:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}_{\phi=0} = \frac{\sqrt{2}kR^2}{4} > 0$$

Debido a que lo que $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} > 0$, se tiene que $\phi = 0$ es un punto de equilibrio estable. Así se tiene finalmente que:

$$\omega_{po}^2 = \frac{1}{mR^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\sqrt{2}k}{4m}$$

Reemplazando el valor de k :

$$\omega_{po}^2 = \frac{g}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})R}$$