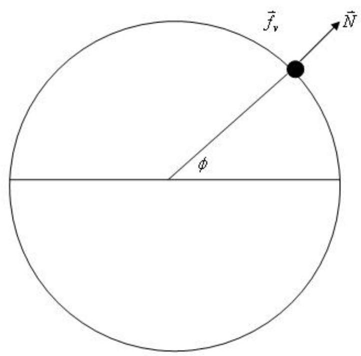
Pauta Control 2
Gabriel Cuevas
21/09/2006

1. **Problema 2.**
   Realizamos el DCL de la partícula:



Podemos ver que la fuerza normal sigue la dirección del vector $\hat{\rho}$, en cambio la fuerza de roce viscosa debemos expresarla de la forma $-c\vec{v}$, donde $\vec{v}$ en este caso corresponde a:

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$$

Es así como las fuerzas agrupadas según componentes quedan:

$$(\hat{\rho})\, N = -mR\dot{\phi}^2$$

$$\left(\hat{\phi}\right) - cR\dot{\phi} = mR\ddot{\phi}$$

La ecuación que utilizaremos será la segunda. Ahora calculamos $\dot{\phi}\,(\phi)$ para poder obtener los valores para los ángulos determinados.
Además sabemos que la condición inicial es que $\phi_o = \frac{v_o}{R}$, por lo tanto:

$$-c\dot{\phi} = m\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$$

$$-\frac{c}{m}\int_0^{\phi} d\phi = \int_{\frac{v_o}{R}}^{\dot{\phi}} d\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}\,(\phi) = \frac{v_o}{R} - \frac{c}{m}\phi$$

Realizados estos cálculos pasamos a resolver cada una de las partes:

a) Calculaeremos el trabajo realizado por la fuerza total hasta que la partícula llega a $\phi = \phi_1$ mediante energía. El trabajo corresponderá a la diferencia entre las energías cinética final e inicial (ya que no existen potenciales que nos interesen):

$$E = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\phi}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_o}{R} - \frac{c}{m}\phi\right)^2$$

$$E_i\,(\phi = 0) = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$E_f\,(\phi = \phi_1) = \frac{1}{2}mv_o^2 - Rv_oc\phi_1 + \frac{1}{2}\frac{(Rc\phi_1)^2}{m}$$

Por lo tanto:

$$W_{Total} = E_f - E_i$$

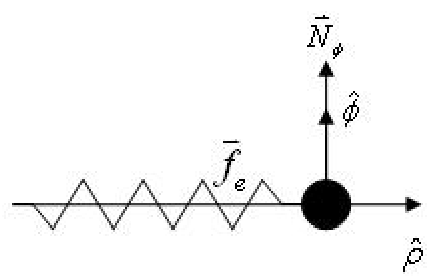
$$W_{Total} = \frac{1}{2}\frac{(Rc\phi_1)^2}{m} - Rv_o c\phi_1$$

b) Para realizar esta parte sólo debemos imponer que $\dot{\phi} = 0$ en media vuelta, es decir $\phi = \pi$:

$$0 = \frac{v_o}{R} - \frac{c}{m}\pi$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{Rc\pi}{m}$$

2. **Problema 3.**
Realizamos el DCL de la partícula (visto desde arriba):



Debemos tener claro que la fuerza elástica está contenida en el eje del vector $\hat{\rho}$ y que su valor es $f_e = -k(\rho - l_o)$ y no debemos considerar su signo al partir del DCL (esto se realiza de la misma manera que con el roce viscoso).
Así las fuerzas según los ejes relevantes son (no consideraremos el eje z):

$$(\hat{\rho}) - k(\rho - l_o) = m\left(\ddot{\rho} - \rho\omega_o^2\right)$$

$$\left(\hat{\phi}\right) N = 2m\dot{\rho}\omega_o$$

A partir de la primera ecuación se obtiene que:

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega_o^2\right)\rho = kl_o$$

a) La ecuación típica de un MAS corresponde a:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = cte$$

Por lo tanto:

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega_o^2$$

Es decir, para que exista MAS, se debe cumplir que:

$$\Omega^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} > \omega_o^2$$

b) Para esta segunda parte imponemos la solución de un MAS la cual tiene la forma:

$$\rho\left(t\right)=A\cos\left(\Omega t\right)+B\sin\left(\Omega t\right)+C$$

Donde C se debe a que la ecuación que obtuvimos tiene una constante. Así reemplazando esta ecuación en la principal obtenida, se puede despejar la constante de la solución particular:

$$\Omega^{2}C=kl_{o}$$

$$\Rightarrow C=\frac{kl_{o}}{k-m\omega_{o}^{2}}$$

Para despejar las constantes A y B, se impone las condiciones $\rho\left(0\right)=\frac{l_{o}}{2}$ y $\dot{\rho}\left(0\right)=0$, de donde se obtiene que:

$$A=\frac{l_{o}}{2}-\frac{kl_{o}}{k-m\omega_{o}^{2}}$$

$$B=0$$

Por lo tanto la solución corresponde a:

$$\rho\left(t\right)=\left(\frac{l_{o}}{2}-\frac{kl_{o}}{k-m\omega_{o}^{2}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\omega_{o}^{2}}t\right)+\frac{kl_{o}}{k-m\omega_{o}^{2}}$$