ESTACIONARIDAD Y ERGODICIDAD DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

A) Estacionaridad en Sentido Estricto

X (t, ζ) es un Procesos Estocástico Estacionario en sentido estricto si sus estadísticas no cambian al desplazar el tiempo:

$$X(t+\tau;\varsigma) \text{ y } X(t,\varsigma)$$

tienen las mismas funciones estadísticas.

Por ejemplo,

$$f(x,t) = f(x,t+\tau)$$

$$F(x,t) = F(x,t+\tau)$$

$$F[x(t_1),x(t_2)] = F[x(t_1+\tau),x(t_2+\tau)]$$
$$etc.$$

$$\Rightarrow f(x,t\,|\,M) = f(x,t+\tau\,|\,M)$$

$$E[X(t)] = E[X(t+\tau)] = cte.$$

$$\sigma_x(t) = \sigma_x(t+\tau) = cte.$$
$$etc.$$

Ejercicio: Demostrar.

B) Estacionaridad en Sentido Amplio

$X(t, \zeta)$ es Estacionario en Sentido Amplio si su valor esperado $E[X(t, \zeta)]$ es constante y su autocorrelación

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t, \zeta)\, X(t+\tau, \zeta)]$$

es independiente de desplazamientos en el tiempo y solo depende del desplazamiento relativo τ:

(i) $E[X(t, \zeta)] =$ cte.

(ii) $R_{xx}(\tau)$ es sólo función de τ (y no de t)

Similarmente, $X(t, \zeta)$, $Y(t, \zeta)$ son Procesos Estocásticos conjuntamente estacionarios en el sentido amplio si:

1) X, Y satisfacen las condiciones (i), (ii) y además

2) $R_{xy}(t, t+\tau) = E[X(t)\, Y(t+\tau)]$ es sólo función de τ:

$$R_{xy}(t, t+\tau) \equiv R_{xy}(\tau)$$

Problema PE 20.- Demostrar que si $X(t, \zeta)$ es un Proceso Estocástico gaussiano y estacionario en sentido amplio, entonces es también estacionario en sentido estricto. Sugerencia: ver $f_{12}(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ en el caso de procesos gaussianos.

Dos V.A. X, Y [p. ej. $X = X(t_1, \zeta)$, $Y = X(t_2, \zeta)$;

ó $X = X(t_1^*, \zeta)$, $Y = Y(t_2, \upsilon)$]

son conjuntamente normales si (ver Papoulis*)

* Papoulis A., S.U. Pillai (2002). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill., Fourth Edition,

$$f(x,y)=Ke^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\overline{X})^2}{\sigma_x{}^2}-2\frac{\rho(x-\overline{X})(y-\overline{Y})}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\overline{Y})^2}{\sigma_y{}^2}\right]}$$

donde

$$K=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)\sigma_x\sigma_y}$$

y ρ es el coeficiente de correlación:

$$\rho=C_{xy}=E\left[\frac{X-\overline{X}}{\sigma_x}\ \frac{Y-\overline{Y}}{\sigma_y}\right]=\frac{E[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})]}{\sigma_x\sigma_y}$$

De aquí se deduce que

$$f(y\,|X=x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\left[y-\overline{Y}-\frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{X})\right]^2}$$

$$E\left[Y\,|X=x\right]=\overline{Y}+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{X})$$

$$E\left[Y\,|X\right]=\overline{Y}+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

$$E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)^2\middle|X\right]=\sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)+\rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\left(X-\overline{X}\right)^2$$

Problema PE 21.-

¿Qué sucede si $\boldsymbol{\rho = 0}$; $\boldsymbol{\rho = \pm 1}$? ¡ Interpretar!

Un Proceso Estocástico $\boldsymbol{X(\zeta, t)}$ es gaussiano (normal) si sus estadísticas son gaussianas, por ejemplo, en el caso de las densidades de probabilidad conjuntas

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2 \ldots, t_n)$$

para las V.A. que resultan al fijar los instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Estacionaridad Conjunta en Sentido Amplio

Dos P.E. son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si sus estadísticas conjuntas de primer y segundo orden no son funciones del tiempo t sino que del desplazamiento τ entre los procesos:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = E\left[X(t_1 + \tau)Y(t_2 + \tau)\right]$$

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E\left[X(t)Y(t + \tau)\right] = E\left[X(t - t)Y(\tau)\right]$$

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E\left[X(0)Y(\tau)\right] = R_{xy}(\tau),$$

es decir la correlación cruzada es solo función del desplazamiento τ .

$$R_{yx}(\tau) = E\left[Y(t)X(t + \tau)\right] = R_{xy}(-\tau) \neq R_{xy}(\tau).$$

Problema N° PE 21A.- Demostrar que si existe estacionaridad en sentido amplio,

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau); \qquad C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$$

Un P.E. es ***asintóticamente estacionario*** si la propiedad de estacionaridad se cumple en el límite, cuando $t \to \infty$.

PROCESOS ESTOCÁSTICOS ERGÓDICOS

La ergodicidad es una propiedad muy importante en los procesos estocásticos porque permite pasar de la teoría a la práctica. En efecto, si un proceso estocástico es ergódico se pueden estimar valores esperados de él (valor esperado, funciones de correlación) *por medio de una sola realización (medición) del proceso estocástico.* No es, entonces, necesario conocer funciones de densidad de probabilidad conjuntas o marginales para el cálculo de esos valores esperados.

Sea $X(\varsigma,t)$ un proceso estocástico estacionario en el sentido amplio. Entonces,

$$E[X(\varsigma_{t'},t')]=E[X(\varsigma_{t''},t'')]=\overline{X}=cte.$$

$$E[X(\cdot,t')X(\cdot,t'')]=E[X(\cdot,t)X(\cdot,t+\tau)]=R_{XX}(\tau)$$

depende de $\tau = t'' - t'$ y no en particular de t' ó t''.

Definición:

$$A_T(\varsigma) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} X(\varsigma, t)\,dt$$

- Se define como ***promedio en el tiempo*** del proceso estocástico ***X***.
- A cada ζ le corresponde un $A_T(\varsigma)$
- $A_T(\varsigma)$ es una variable aleatoria (se puede demostrar que cumple las otras condiciones).

$$\varsigma \in \Omega \rightarrow X(t,\varsigma) \rightarrow A_T(\varsigma)$$

En el caso de t discreto,

$$A_T(\varsigma) = \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N} X(\varsigma, i) = \frac{1}{T}\sum_{i=-N}^{N} X(\varsigma, i)$$

$$con\ T = 2N+1$$

$$E[A_T(\varsigma)] = \frac{1}{T}\sum_{i=-N}^{N} E[X(\varsigma, i)] = \frac{1}{T}\sum_{-N}^{N} \overline{X} = \overline{X}$$

$$E[A_T(\varsigma)] = \overline{X} = \overline{A_T},$$

Esto significa que $A_T(\varsigma)$ es un estimador ***insesgado*** de $X(\zeta)$.

El Proceso Estocástico es Ergódico con respecto al Valor Esperado si

- $\sigma_{A_T} \to 0 \quad cuando \;\; T \to \infty$

- Y similarmente para el caso del promedio en el tiempo correspondiente a $R_{xx}(\tau)$, el proceso es ergódico con respecto a la autocorrelación

Problema PE 21

¿Es ergódico (con respecto al valor esperado) el proceso estocástico generado al lanzar repetidamente una moneda y asignar 1 a *cara* y cero a *sello*? ¿Qué pasa con $\sigma^2_{A_T}$?

En el caso de tiempo continuo:

$$E(A_T) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(\varsigma,t)\,dt \right] dP(\varsigma)$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left[\int_{\Omega} X(\varsigma,t)\,dP(\varsigma) \right] dt$$

$$E\left[X(\varsigma,t)\right]$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} E\{X(t,\varsigma)\}dt = \frac{\overline{X}}{2T}\int_{-T}^{+T} dt = \overline{X}$$

La varianza de $\boldsymbol{A_T}$ en el caso de tiempo discreto es (con $T=2N+1$)

$$\sigma_{A_T}^2 = E\left\{ \left[A_T - \overline{A}_T \right]^2 \right\}$$

$$\sigma_{A_T}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{T}\sum_{-N}^{N} X(\varsigma_i, i) - \overline{A}_T\right]^2\right\}$$

$$\sigma_{A_T}^2 = E\left\{\frac{1}{T^2}\left[\sum_{-N}^{N} X(\varsigma_i, i) - T\overline{A}_T\right]^2\right\}$$

$$\sigma_{A_T}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{T}\sum_{-N}^{N}\left[X(\varsigma_i, i) - \overline{X}\right]\right]^2\right\}$$

porque

$$\overline{A}_T = \overline{X}$$

$$T^2\sigma^2_{A_T} = \sum_{-N}^{N} \overbrace{E\left[X(\varsigma,i)-\overline{X}\right]^2}^{\sigma_X^2} +$$

$$\sum_{i=-N}^{N}\sum_{J=-N}^{N} E\left[X\left(\varsigma_i,i\right)-\overline{X}\right]\left[X\left(\varsigma_j,j\right)-\overline{X}\right]$$

$$\boxed{R_{xx}\,(\,j\text{-}i\,) \quad i \neq j}$$

$T = 2N+1$

$$\sigma^2_{A_T} = \frac{1}{T^2}\left[T\sigma^2_X + \sum_{i=-N}^{N}\ \sum_{j=-N}^{N} R_{XX}\left(j-i\right)\right]$$

$$\sigma^2_{A_T} = \frac{\sigma^2_X}{T} + \underbrace{\frac{\sum_{i=-N}^{N}\ \sum_{j=-N}^{N} R_{XX}\left(j-i\right)}{T^2}}_{i\neq j}$$

$$\lim_{T\to\infty} \sigma^2_{A_T} \to \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=-N}^{N}\ \sum_{j=-N}^{N} R_{XX}\left(j-i\right)}{T^2}$$

Si X_i y X_j no están correlacionados (por ejemplo: independientes, como en el caso del proceso estocástico generado al lanzar una moneda), $R_{XX}(j-i)=0$, y

$$\boxed{\sigma^2_{A_T} \rightarrow 0}$$

También sucede en muchos casos que :

$$R_{xx}(i-j) \rightarrow 0 \quad si \quad |i-j| \rightarrow \infty$$

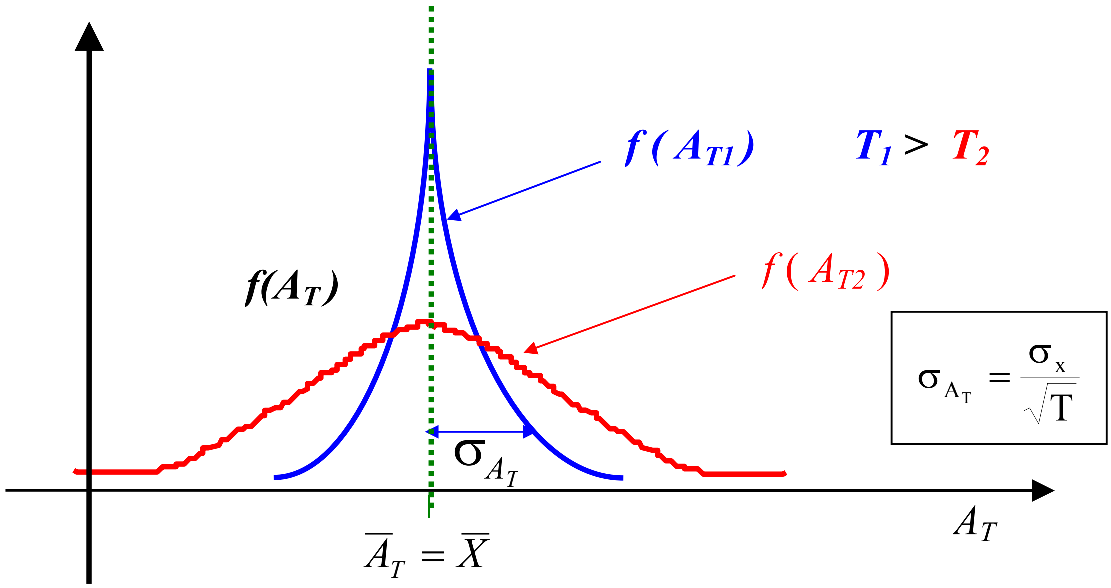
$$R_{xx}(i-j) \leq L < \infty$$

Entonces, puede ser que

$$\lim_{T\rightarrow\infty} \frac{\sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} R_{xx}(i-j)}{T^2} \rightarrow 0$$

aunque X_i y X_j estén correlacionados . Por ejemplo, en los P.E. RB Binario Gaussiano y RB Binario X_i ,X_j no están correlacionados ; pero en RB Generalizado X_i , X_j están correlacionados.

Más adelante se ve el Teorema de Slustky que permite determinar si un P.E. es ergódico.



A medida de que aumenta el largo ***T*** del promedio en el tiempo, $\sigma_{A_T} \to 0$ y la probabilidad de que A_T sea distinto de $\overline{X} = E(X) \to 0$.

Esto es lo que se expresa coloquialmente como:

" En un Proceso Estocástico Ergódico, los promedios en el tiempo son iguales a los promedios en el espacio muestral "

Algo similar ocurre con

$$R_{XY} \quad \text{y} \quad A_{XY}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{i=-N}^{N} X_i X_{i-\tau}$$

(Ver Papoulis).

En el siguiente ejemplo se obtiene el promedio temporal A(T) del proceso estocástico X(t) de Ruido Blanco de D (generado con la función ALEATORIO en ECXEL, con distribución uniforme en [0,1]). Para diversas realizaciones (pulsar F9) se ve que A(T) siempre tiende a E{X(t)}=0.5.

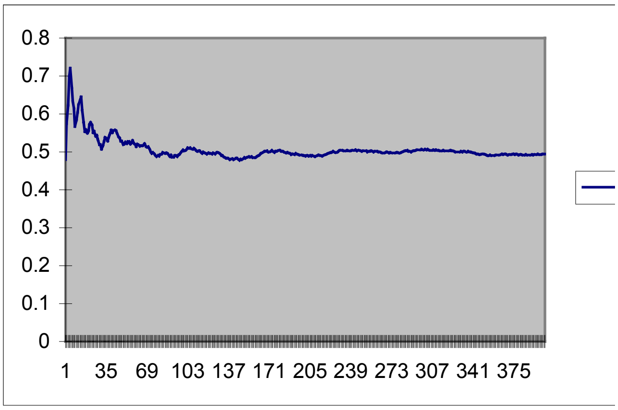
PROCESO ESTOCÁSTICO ERGÓDICO

prmtempo.xls

El promedio temporal A(T) tiende a E{X}

Pusar F9 y obtener distintas realizaciones usando ***prmtempo.xls***

Tiempo T	Proc. Estoc. X(T)	Promedio Temporal A(T)
1	0.29667281	0.29667281
2	0.44303234	0.63898936
3	0.83494639	0.83494639
4	0.21982007	0.52738323
5	0.06420914	0.37299187
6	0.80931295	0.48207214
7	0.47378753	0.48041522
8	0.27867435	0.44679174
9	0.07216744	0.39327398
10	0.96777433	0.46508653
11	0.72298909	0.49374237
12	0.68722719	0.51309085
13	0.46959425	0.50913661
14	0.0964613	0.474747
15	0.55774536	0.48113149
16	0.82846428	0.50594098
17	0.55905342	0.50948181
18	0.67497673	0.51982524
19	0.15778748	0.4985289
20	0.84220638	0.51762209
21	0.52022977	0.51775934
22	0.38785189	0.51126397
23	0.30469928	0.50142755
24	0.66293599	0.50876885
25	0.90573368	0.52602819
26	0.42179299	0.52168505
27	0.64032318	0.52643058
28	0.82524071	0.53792328
29	0.90036623	0.55134709
30	0.7081195	0.5569461
31	0.65293815	0.56025617
32	0.71691615	0.56547817
33	0.04480165	0.54868216
34	0.20829501	0.53804506
35	0.87657653	0.54830359
36	0.06942419	0.5342189
37	0.02627497	0.51970622
38	0.25780892	0.51243129



ergobin.xls GGR/

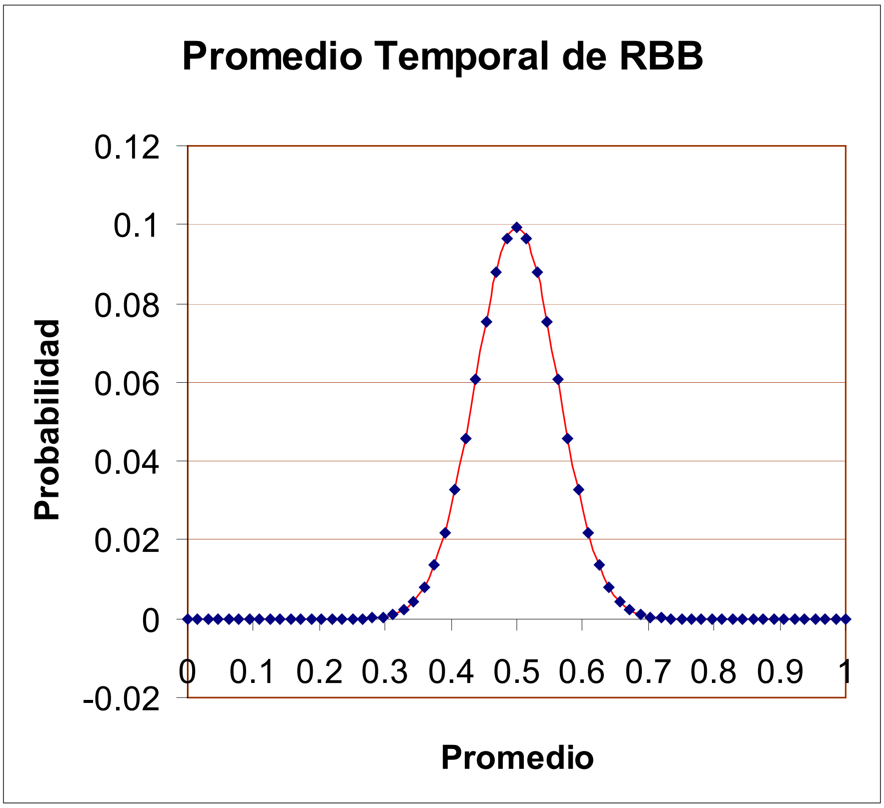
Ejemplo de
Ergodicidad
Ruido Blanco Binario (RBB)
Espacio de probabilidades: n = 64 puntos en OMEGA
correspondientes a lanzar 64 veces una moneda
Proceso estocástico: Sucesiones de 1's y 0's de 64 elementos
con la asignación CARA = 1; SELLO = 0.

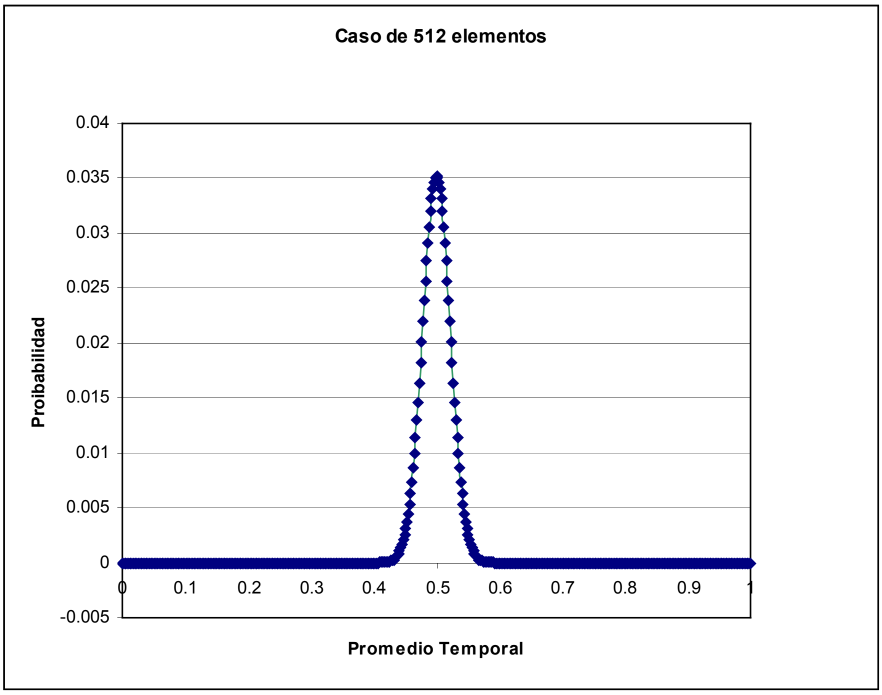
P = 0.5 **n = 64**

N° de Unos ***k*** en la sucesión	Casos: (n sobre k)	Probabilidad	Promedio	
0	1	5.421E-20	0	
1	64	3.469E-18	0.015625	
2	2016	1.093E-16	0.03125	
3	41664	2.259E-15	0.046875	
4	635376	3.444E-14	0.0625	
5	7624512	4.133E-13	0.078125	
6	74974368	4.064E-12	0.09375	
7	621216192	3.368E-11	0.109375	
8	4426165368	2.399E-10	0.125	
9	27540584512	1.493E-09	0.140625	
10	1.51473E+11	8.211E-09	0.15625	
11	7.43596E+11	4.031E-08	0.171875	
12	3.28421E+12	1.78E-07	0.1875	
13	1.31369E+13	7.122E-07	0.203125	
14	4.78557E+13	2.594E-06	0.21875	
15	1.59519E+14	8.648E-06	0.234375	
16	4.88527E+14	2.648E-05	0.25	
17	1.37937E+15	7.478E-05	0.265625	
18	3.60169E+15	0.0001952	0.28125	
19	8.71988E+15	0.0004727	0.296875	
20	1.96197E+16	0.0010636	0.3125	
21	4.1108E+16	0.0022285	0.328125	
22	8.03474E+16	0.0043556	0.34375	
23	1.46721E+17	0.0079538	0.359375	
24	2.50649E+17	0.0135877	0.375	
25	4.01039E+17	0.0217403	0.390625	
26	6.01558E+17	0.0326105	0.40625	
27	8.46637E+17	0.0458963	0.421875	
28	1.11877E+18	0.0606487	0.4375	
29	1.38882E+18	0.075288	0.453125	
30	1.62029E+18	0.087836	0.46875	*
31	1.77709E+18	0.0963362	0.484375	*

32	**1.83262E+18**	**0.0993468**	**0.5 ***	Probab. Máx.
33	1.77709E+18	0.0963362	0.515625 *	
34	1.62029E+18	0.087836	0.53125 *	
35	1.38882E+18	0.075288	0.546875	
36	1.11877E+18	0.0606487	0.5625	

Gráfico de la probabilidad del promedio
Sucesiones de 64 elementos





Sucesiones de 512 elementos

MEDICIÓN DE ESTADÍSTICAS.

¿ Cómo encontramos $\overline{X}$, $R_{XX}(\tau)$, $R_{XY}(\tau)$, etc.?

1.- Determinación de Estadísticas en un caso Ergódico.

Si el proceso $X(t,\varsigma)$ es ergódico, podemos emplear una sola realización $X(t,\varsigma')$ para calcular estas estadísticas mediante promedios en el tiempo.

$$A_T(\varsigma) = \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t,\varsigma)dt \quad \rightarrow \quad \overline{X}$$

en el sentido de que

$$\sigma_{A_T} \rightarrow 0 \quad si \quad T \rightarrow \infty$$

con

$\overline{A(T)} = \overline{X}$.

<u>Ejemplo:</u>

$$A_T(\tau) = \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} X(t,\varsigma)X(t-\tau,\varsigma)\,dt \rightarrow R_{XX}(\tau)$$

$$E\{A_T(\tau)\} = \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\{X(t,\varsigma)X(t-\tau,\varsigma)\}dt = \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_{xx}(\tau)dt$$

Pero como $R_{XX}(\tau)$ no depende de *t* , resulta

$$\boxed{E\{A_T(\tau)\} = R_{XX}(\tau)}$$

Además, si el PE X es ergódico,

$$\sigma_{A_T(\tau)} \to 0 \qquad \text{si } \mathrm{T} \to \infty.$$

Similarmente para R_{xy}, R_{yy}, $E\{y\}$, etc.

Problema PE 22

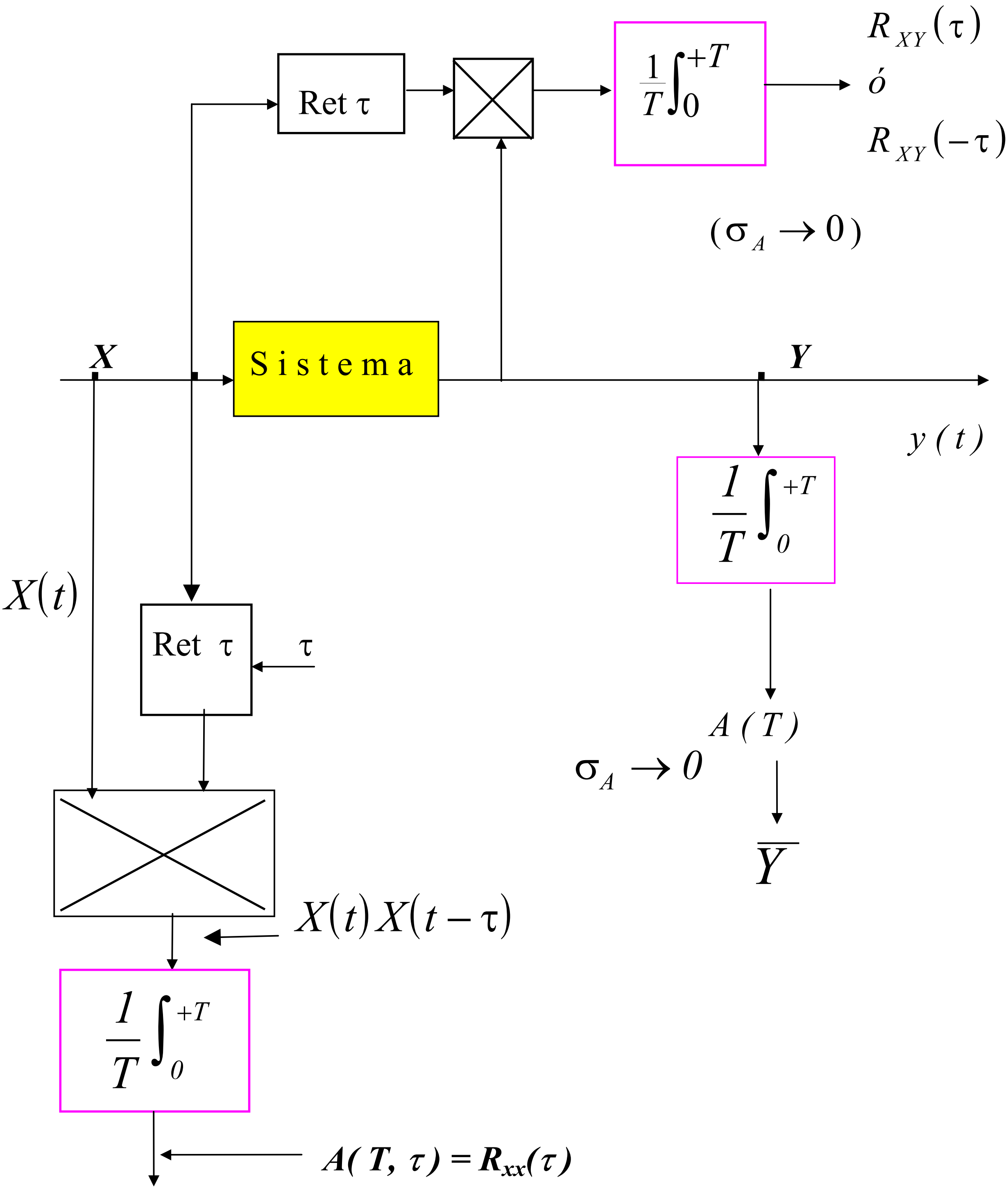
Encontrar condiciones para la ergodicidad del valor esperado del proceso estocástico $X(t,\varsigma)$, $E(X) = \overline{X}$, si ***t*** es continuo.

Problema PE 23

Demostrar que el proceso estocástico de ruido blanco binario (***RBB***) es ergódico con respecto al valor esperado. Nótese que como el promedio en el tiempo $A_T \to \overline{X} =$ cte el proceso estocástico debe ser estacionario. Comprobarlo experimentalmente utilizando un gráfico de $\boldsymbol{A_T}$ en función de ***T***.

INSTRUMENTACIÓN

En la Figura de la página siguiente se da una posible instrumentación para de terminar estadísticas de primer y segundo orden, aprovechando la propiedad ergódica de un proceso estocástico, sobre la base de una sola realización (en el tiempo).



Instrumentación para determinar estadísticas de primer y segundo orden aprovechando la ergodicidad del P.E. ***X.***

Teoremas de Ergodicidad

a) Tiempo Continuo

Teorema de Ergodicidad de la Media (Slutsky)

La condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico x(t,ζ) de tiempo continuo estacionario en el sentido amplio sea *ergódico con respecto su valor esperado* es que [Papoulis, loc. cit.]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)d\tau = 0$$

Aquí

$$C_{xx}(\tau) = E\{[x(t+\tau,\varsigma)-\bar{x}]\,[x(t,\varsigma)-\bar{x}]\}.$$

Recordar que esto significa que la varianza $\sigma^2_{A_T}$ del promedio en el tiempo $A_T(\zeta)$ tiende a cero al tender T a ∞. Recordar que $A_T(\zeta)$ es un estimador insesgado de $E\{X(t,\zeta)\}$.

Ejemplo.- Tomemos el P.E. visto anteriormente

$$X(t,\zeta) = M(\zeta)\ \text{sen}\,\omega t,$$

donde $M(\zeta)$ es una Variable Aleatoria de media $\bar{M} = 0$ y $\omega > 0$. Notar que $E\{X(t,\varsigma)\} = 0$ y, por lo tanto, el proceso estocástico es estacionario en su valor esperado (Si $\bar{\text{M}} \neq 0$ no es estacionario ni, por lo tanto, ergódico).

$$C_{xx}(t,\tau) = E\{M(\varsigma)sen\omega t\, M(\varsigma)sen\omega(t+\tau)\}$$

porque $E\{X(t,\varsigma)\}=0$.

$$C_{xx}(t,\tau)=E\{M^2(\varsigma)\}\,sen\omega t\, sen\omega(t+\tau)=\sigma_M^2 sen\omega t\, sen\omega(t+\tau)$$

Por lo tanto, este P.E. no es estacionario en sentido amplio y, por lo tanto, no es ergódico.

El Teorema de Slutsky no se debe aplicar, puesto que el P.E. ***no es estacionario***. Si lo hiciéramos, obtendríamos una conclusión falsa (ver ANEXO).

Notamos que es *suficiente* (pero no necesario) que la función de autocorrelación centrada sea tal que

$$\int_0^T C_{xx}(\tau)d\tau < K < \infty$$

para que se cumpla

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)d\tau=0$$

Teorema de Ergodicidad de la Varianza (tiempo continuo)

La condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico $x(t,\zeta)$ centrado ($E\{x\} = 0$) de tiempo continuo estacionario en el sentido amplio sea *ergódico con respecto su varianza* es que [Papoulis, loc. cit.]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E\{x^2(t+\tau)x^2(t)\}d\tau = C^2{}_{xx}(0) = \sigma_x^2 \cdot .$$

Esto significa que la varianza $\sigma_{B_T}^2$ del promedio en el tiempo

$$B_T(\varsigma,0) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x^2(t,\varsigma)dt$$

tiende a cero al tender T a ∞. Recordar que $B_T\ (\zeta,\tau)$ es un estimador insesgado de $R_{xx}(\tau)$ y, por lo tanto, $B_T\ (\zeta,0)$ es un estimador insesgado de σ_x^2 . Entonces,

$$B_T(\zeta,0) \xrightarrow[e.m.c]{} \sigma_x^2$$

si $T \to \infty$.

Si este P.E. centrado $x(t,\zeta)$ es además gaussiano, la condición necesaria y suficiente se convierte en

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}^2(\tau)d\tau = 0.$$

(Ver Papoulis, loc. cit.)

b) Tiempo Discreto

Teorema de Ergodicidad de la Media

La condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico $x(k,\zeta)$ de tiempo discreto estacionario en el sentido amplio sea *ergódico con respecto su valor esperado* es que

$$\lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{M}\sum_{n=0}^{M} C_{xx}(n) = 0$$

Aquí

$$C_{xx}(n) = E\left\{\left[x(k+n,\varsigma) - \bar{x}\right]\left[x(k,\varsigma) - \bar{x}\right]\right\}$$

$k,\ n \in$ Z.

Esto significa que la varianza $\sigma^2_{A_T}$ del promedio en el tiempo discreto de $A_T(\zeta)$ tiende a cero al tender $T = 2N + 1$ a ∞.

Recordar que

$$A_T(\varsigma) = \tfrac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N} X(\varsigma,i) = \tfrac{1}{T}\sum_{i=-N}^{N} X(\varsigma,i),$$

con $T = 2N+1$, es un estimador insesgado de $E\{x(k,\zeta)\}$.

Las demostraciones de estos teoremas se dará mas adelante, una vez que se haya visto la respuesta de sistemas lineales a procesos estocásticos (ver Papoulis, 2002)[*].

---

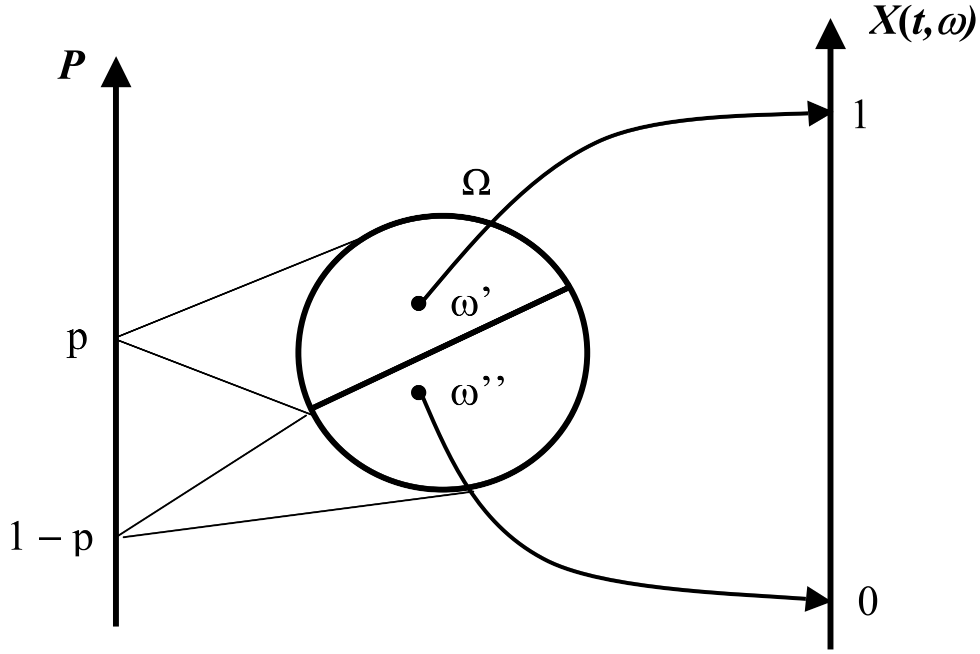
[*] Papoulis A., S.U. Pillai (2002). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill., Fourth Edition,

Ejemplo.-

Sea $X(t,\omega)$ un proceso estocástico definido por

$$X(t,\omega) = M(\omega)1(t)$$

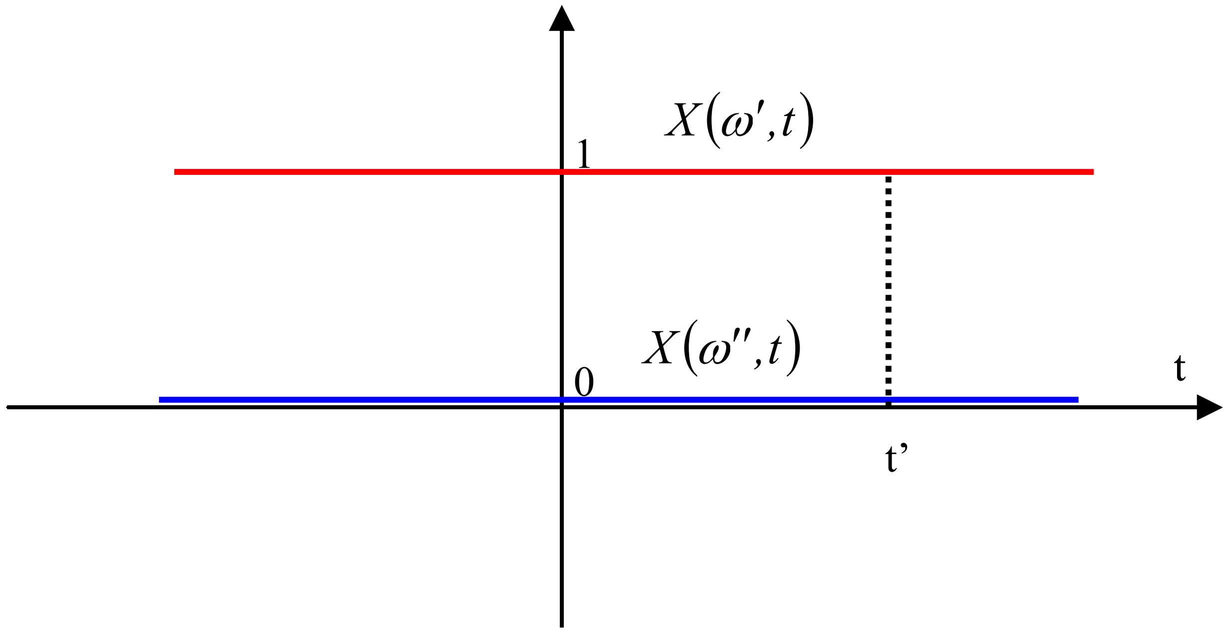
donde $M(\omega)$ es una variable aleatoria binaria que toma los valores 1 y 0.



Espacio de Probabilidades y Variable Aleatoria

$$P[\{\omega \mid X(\omega) = 1\}] = P[\{\omega'\}] = p = P(X = 1)$$

$$P[\{\omega \mid X(\omega) = 0\}] = P[\{\omega''\}] = 1 - p = P(X = 0)$$



El promedio en tiempo del P.E. X es la variable aleatoria

$$A_T(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t,\omega)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} M(\omega)1(t)dt$$

Para la realización $X(t,\omega')$ este promedio vale

$$A_T(\omega') = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1\cdot 1(t)dt = 1$$

y para $X(t,\omega'')$,

$$A_T(\omega'') = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 0\cdot 1(t)dt = 0$$

o sea que los promedios en el tiempo para las distintas realizaciones son distintos para todo T. Por lo tanto, no pueden converger a un sólo valor, (el valor esperado del P.E. que es igual a p, según se ve más adelante) si T tiende a infinito. Por lo tanto, el proceso no es ergódico.

Pero veamos una demostración basada en las propiedades del PE.

A. Estacionaridad de este Proceso Estocástico

1.- Valor Esperado.

En cada instante t, $X(t,\omega)$ es una variable aleatoria. Su valor esperado es

$$E\{X(t,\omega)\} = E\{M(\omega)1(t)\} = E\{M(\omega)\}$$

$$E\{M(\omega)\} = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Por lo tanto, $E\{X(t,\omega)\} = p$ es constante (lo que es requisito para estacionaridad en sentido amplio).

2.- Autocorrelación

$$R_{xx}(t,\tau) = E\{X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)\} = E\{M(\omega) \cdot 1(t) M(\omega) \cdot 1(t-\tau)\}$$

$$R_{xx}(t,\tau) = E\{M^2(\omega)\} = 1^2 p + 0^2 (1-p) = p$$

Por lo tanto la función de autocorrelación no depende de t (En este caso ni siquiera depende de τ).

Por ser el valor esperado del P.E. constante y su función de autocorrelación independiente de t, este P.E. X es ***estacionario en el sentido amplio.***

Le función de autovarianza C_{xx} es R_{xx} de las V.A. centradas.

$$C_{xx} = E\left\{\left(X(t,\omega) - \overline{X}\right)\left(X(t-\tau,\omega) - \overline{X}\right)\right\} = E\left\{X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)\right\} - \left[\overline{X}\right]^2$$

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \left[\overline{X}\right]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

B. Ergodicidad del Proceso Estocástico

1.- Según Teorema de Slutsky

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)\,d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p(1-p)\,d\tau = p(1-p) \neq 0$$

Por lo tanto, no se cumple el Teorema de Slutsky: El P.E. *no es ergódico en su valor esperado*

2.- Según Definición de Ergodicidad.

$$A_T(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t,\omega)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} M(\omega)1(t)\,dt$$

$$A_T(\omega) = \frac{M(\omega)}{2T}\int_{-T}^{T} 1(t)\,dt = M(\omega)$$

$$E\{A_T(\omega)\} = E\{M(\omega)\} = p = E\{X(t,\omega)\}$$

Por lo tanto, $A_T(\omega)$ es un estimador insesgado del valor esperado del P.E. $X(t,\omega)$. Veamos ahora si la varianza de este estimador tiende a cero al crecer T.

Varianza de A_T

$$\sigma_A^2 = E\left\{\left[A_T - E\{A_T\}\right]^2\right\} = E\left\{A_T^2\right\} - \left(E\{A_T\}\right)^2$$

$$E\left\{A_T^2\right\} = E\left\{\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T M(\omega)1(t)dt\right]^2\right\} = \frac{E\left\{M^2(\omega)\right\}}{T^2}\left[\int_0^T 1(t)dt\right]^2 = E\left\{M^2(\omega)\right\}$$

$$E\left\{M^2(\omega)\right\} = 1^2\, p + 0^2\,(1-p) = p$$

$$\sigma_A^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Por lo tanto, σ_A^2 no tiende a cero cuando T tiende a infinito: El P.E. ***no es ergódico en su valor esperado***

2.- Determinación de estadísticas en caso no ergódico.

Para un proceso estocástico $x(t,\zeta)$ no ergódico (p. ej., en el caso de procesos estocásticos no estacionarios), supongamos que podemos obtener varias realizaciones del proceso estocástico. Cada una de ellas corresponderá a un punto ζ'_i de un espacio Ω_i cuyos elementos llamaremos ζ_i.

Sea $x(t_1,\varsigma_i)$ la variable aleatoria que resulta al fijar $t = t_1$, y definamos

$$M(t_1,\xi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t_1,\varsigma_i) \tag{2.1}$$

el promedio de las variables aleatorias para los N espacios de resultados Ω_i correspondientes a los N diferentes experimentos que generarán las N realizaciones $x(t_1,\varsigma'_i)$, i = 1, ..., N.

Aquí $\xi = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_N\}$ y $\xi = \xi' = \{\varsigma'_1, \varsigma'_2, \ldots, \varsigma'_N\}$ para un conjunto de N realizaciones del proceso estocástico $x(t, \zeta)$.

Notar que, contrariamente al caso ergódico, en vez de fijar $\zeta = \zeta'$ para una sola posible realización y obtener su promedio en t, aquí se ha fijado $t = t_1$ y se ha obtenido el promedio con respecto a las realizaciones.

El valor esperado de (2.1) es

$$\overline{M(t_1,\xi)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{x(t_1,\varsigma_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{x(t_1)} = \overline{x(t_1)}$$

Entonces, $\overline{M(t_1,\xi)}$ es un estimador insesgado del valor esperado $\overline{x(t_1)}$ del proceso estocástico $x(t,\zeta)$ en $t = t_1$.

Desde luego el problema es que se requieren varias realizaciones del P.E para obtener una buena estimación, porque se puede demostrar que la varianza del estimador $\overline{M(t_1,\xi)}$ disminuye al aumentar *N*.

Ejemplo.-

Consideremos el P.E de tiempo discreto ya visto en el archivo PEs_1 consistente en lanzar una moneda en los instantes discretos *k* = 1, 2, ..., j, ... y asignar 1 al resultado cara y 0 al resultado sello. Al fijar *k = j* se tendrá una variable aleatoria $x(j,\zeta_i)$ que dará lugar a la realización $x(j,\zeta'_i)$ de esa variable aleatoria. En el instante *j* hay *N* variables aleatorias que darán lugar a *N* realizaciones de esas variables aleatorias que pueden valer 0 ó 1 en *k = j*, por ejemplo, como se muestra en la Tabla I

Tabla I

Realiz. ζ_i	*k* = 1	*k* = 2	....	*k = j*			....	*k*
i = 1	0	0	....	1	0	0	....	1
2	0	1	....	1	1	0	....	0
3	1	0	....	0	1	1	....	1
....	....	....	....	....	....	....	....	....
N–1	1	0	....	1	0	1	....	1
i = N	0	1	....	0	0	1	....	0

Promedio en el tiempo en caso de PE no estacionario.-

Sea *x(t)* un PE no estacionario en el sentido amplio cuyo valor esperado es función del tiempo (en vez de ser constante como en un PE estacionario):

$$E\{x(t,\xi\}=\overline{x(t)}$$

El promedio en el tiempo es

$$A_T(\xi) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t,\xi)dt$$

Entonces

$$E\{A_T(\xi)\} = E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t,\xi)dt\right\}$$

$$E\{A_T(\xi)\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\{x(t,\xi)\}dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{x(t)}\,dt = Cte.$$

Por lo tanto el promedio en el tiempo es distinto del valor esperado, por una parte, ya que el promedio en el tiempo es una constante y el valor esperado es una función del tiempo.

ANEXO

Continuando desde p. 91, tenemos,

$$2\operatorname{sen}\omega\, t\operatorname{sen}\omega(t+\tau) = \cos\omega\tau - \cos(2\omega t + \omega\tau)$$

$$\tfrac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)\,d\tau = \tfrac{\sigma_M^2}{2T}\left[\int_0^T \cos\omega\tau\,d\tau - \int_0^T \cos(2\omega t + \omega\tau)\,d\tau\right]$$

$$\tfrac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)\,d\tau = \tfrac{\sigma_M^2}{2T}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega\tau + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega(2t+\tau)\right]_0^T =$$

$$\tfrac{\sigma_M^2}{2T}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega T+\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega(2t+T)-\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(2\omega t)\right]$$

Como $|\operatorname{sen}\alpha|\leq 1$,

$$\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)d\tau=0\,, \qquad (¡)$$

por lo cual uno tendería a concluir que el P.E. el proceso estocástico es ergódico. Pero esta conclusión es falsa porque el P.E. no es estacionario y, por lo tanto no puede ser ergódico. El teorema de Slutsky se aplica a procesos estacionarios en el sentido amplio.