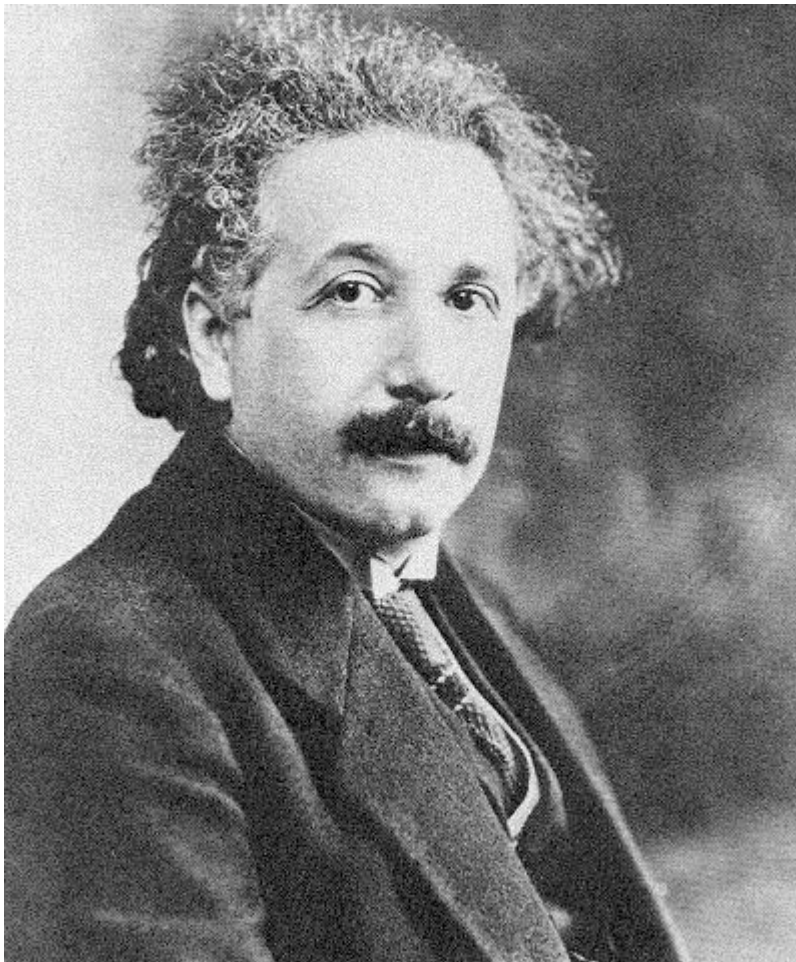


2.11. Cosmología: Einstein, de Sitter y Lemaître.

2.11.1. Introducción:

La solución a los problemas encontrados por la física newtoniana para abordar la cosmología vino a manos de Albert Einstein (1879-1955) con su teoría general de la relatividad. Einstein introdujo el uso de geometrías no-euclidianas para describir las propiedades del espacio y el tiempo.



Albert Einstein (1879-1955)

Las geometrías no-euclidianas habían sido desarrolladas durante el siglo XIX por varios matemáticos empezando por el mismo Carl Gauss que demostró que se puede construir una geometría deductiva consistente si se cambia algunos de los postulados de Euclides. Por ejemplo el axioma que sólo se puede trazar una paralela a una recta dada, que pase por un punto dado, puede ser reemplazado diciendo que se pueden

trazar muchas o ninguna. Los matemáticos Nicolai Lobachevskii (1792-1856), ruso y János Bolyai (1802-1860), húngaro, derivaron muchas de las consecuencias de geometrías no-euclidianas donde muchas paralelas pueden ser construidas. Otro tipo de geometrías no-euclidianas donde no se pueden trazar paralelas las desarrolló Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). A medida que el campo de las geometrías no-euclidianas se popularizó nuevas técnicas matemáticas fueron desarrolladas para las descripciones analíticas de las diversas geometrías, incluyendo el cálculo tensorial. De esta manera Einstein dispuso de las herramientas matemáticas para desarrollar sus nuevas concepciones físicas.

En 1905 Albert Einstein, un desconocido funcionario de la Oficina de Patentes en Berna, Suiza, publica la teoría Especial de la Relatividad. Con ello da cuenta del resultado negativo del experimento de Michelson y Morley. La Relatividad especial representa una gran ruptura con la mecánica newtoniana pero sólo se refiere a la cinemática. Einstein buscó por años una generalización de su teoría que incluyera la dinámica y los campos gravitatorios.

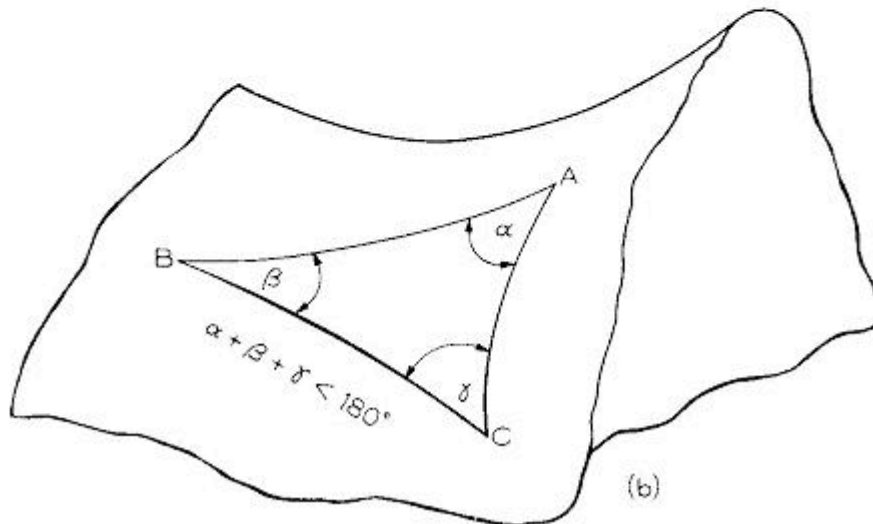
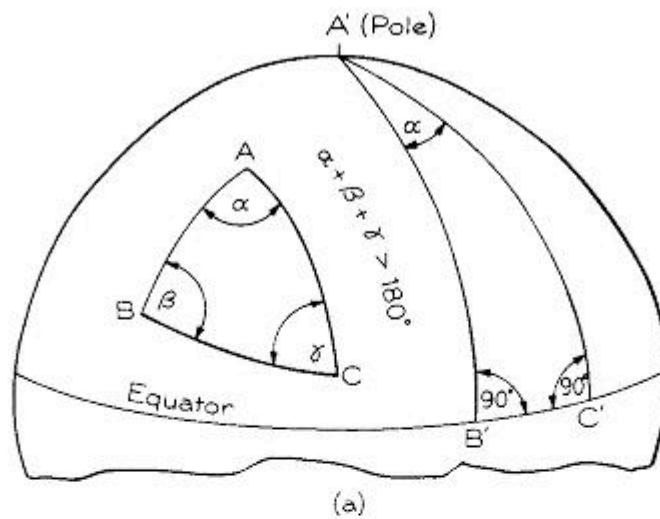
Durante los años 1912-1914 Einstein trabajó con un amigo suizo-alemán Marcel Grossman aplicando geometrías no-euclidianas a los conceptos del espacio-tiempo. Como resultado el pudo describir la gravitación como una deformación de la geometría del espacio-tiempo en la vecindad de un cuerpo masivo. Ello simplifica la gravitación desde un punto de vista conceptual, pues ya no se necesitan fuerzas o acciones a distancia. Sin embargo la matemática para describir la gravitación se hace más compleja. Pese a ello la nueva teoría de la gravitación posibilita abordar la cosmología. Un resultado de estos años son las llamadas ecuaciones de campo de Einstein, que expresan la estructura geométrica general del Universo.

Einstein estaba plenamente consciente de las dificultades involucradas en la aproximación newtoniana a la cosmología. A fin de evitar los problemas de un universo infinito Einstein introdujo una constante arbitraria, Λ , que se conoce hasta ahora como la constante cosmológica. Desde un punto de vista matemático la introducción de la constante Λ es impecable pues es el resultado de la primera integración de las ecuaciones y para preservar el carácter general de la solución es necesario conservarla. Inicialmente Einstein la había excluido (hecho nula) para que su teoría no tuviese nuevas constantes que deberían ser determinadas empíricamente; sin embargo si hacía nula la constante no podía encontrar un modelo para el universo que fuese estático. Obviamente su disgusto por una nueva constante era menor que el que le debe haber producido un modelo no-estático. En efecto, en 1917 Einstein escribe que el término *“es necesario sólo para el propósito de producir una distribución cuasi-estática de materia”*.

El término gravitacional planteado por la constante Λ corresponde a una fuerza repulsiva que aumenta con la distancia. De este modo, según Einstein, dos masas se atraerían con una fuerza que disminuye con el cuadrado de la distancia (proporcional a $1/r^2$) y al mismo tiempo se repelerían con una fuerza que aumenta linealmente con la distancia (proporcional a r). Por ende hay una distancia a la cual las dos fuerzas se

anularían. Si Λ fuese lo suficientemente pequeña su efecto sería imperceptible a nivel del sistema solar y de la Vía Láctea; sólo a escalas cosmológicas Λ mostraría su influencia.

Aunque resuelve un problema su modelo no está exento de otros. Un universo cerrado en un espacio curvo le permitió a Einstein resolver de una manera elegante los problemas asociados con un universo infinito. La estructura del espacio tiempo en un universo finito, ilimitado, sujeto a la geometría no-euclidiana, permite una solución estática al modelo cosmológico, que está libre de los problemas de otros modelos.



¿Qué significa espacio-tiempo curvo? El ejemplo en una geometría bi-dimensional es un casquete esférico. Una criatura plana que viviese en la superficie de una esfera puede hacer varias medidas para determinar la naturaleza geométrica de su mundo. Podrías hacer un triángulo y medir sus ángulos interiores. Para su sorpresa encontraría que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo alcanza a más de 180 grados. Revisando sus libros de geometría (plana por supuesto) se daría cuenta que vive en un mundo bi-dimensional curvo, esférico. En universo de Einstein es curvo, esférico, de modo que viajando siempre en la misma dirección llegaríamos al mismo punto de partida.

En un mundo bi-dimensional construido sobre una superficie que fuese parte de un paraboloide hiperbólico (una silla de montar) la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180 grados. En principio, si viviésemos en un mundo bi-dimensional, bastaría construir un triángulo, medir sus ángulos y sabríamos de inmediato si el mundo es plano, esférico o hiperbólico. Así se podría demostrar, en principio, que la superficie de la Tierra no es plana.

El astrónomo holandés **Willem de Sitter** (1872-1935) en 1917 resolvió las ecuaciones de Einstein y obtiene tres soluciones para el universo: la solución de Einstein, una segunda solución para un universo sin masa con constante cosmológica Λ que representa un universo con corrimiento al rojo (en expansión) pero sin masa. El tercer modelo no tiene ni masa ni constante cosmológica. El modelo de de Sitter sin masa ($\rho = 0$) y con $\Lambda \neq 0$ es una interesante variación del Universo de Einstein.

En 1922 el científico ruso **Alexandr Friedmann** (1888-1925) publica una solución de las ecuaciones de Einstein para un caso más general. Friedmann acepta que la curvatura del universo pueda variar en el tiempo (cosa que no hacen ni Einstein ni de Sitter) y posteriormente, en 1924, publica en una revista alemana una versión donde se consideran universos en expansión y en contracción; en particular estudia universos con curvatura negativa que él demuestra que pueden contener materia, evitando la dificultad de los universos vacíos de de Sitter. Friedmann murió prematuramente en 1925 por lo cual su trabajo no llegó más lejos.

En 1927 el jesuita belga **Georges Lemaître** (1894-1966) que había estudiado con Eddington en Inglaterra entre 1923-24 y luego se había dirigido al Harvard College Observatory en Estados Unidos, publica una crítica al modelo de de Sitter y desarrolla modelos muy similares a los de Friedmann pero permitiendo expansión, contracción y la presencia de la constante cosmológica. Estos modelos de Lemaître son los más generales que se pueden derivar de la ecuaciones de Einstein

En 1934 Edward Arthur Milne (1896-1950) y William H. McRae se dieron cuenta que era posible rescatar las principales características de los modelos de Friedmann y de Lemaître utilizando la mecánica newtoniana. Con esta formulación es de gran simpleza comparada con la formulación exacta de la relatividad general se la presenta a continuación.

2.11.2. Dinámica Newtoniana de una Nube de gas.

Supongamos que tenemos una nube de tamaño finito pero de dimensiones mucho mayores que cualquier distancia que podamos observar en el Universo. Supongamos además que la nube es homogénea. Si nos restringimos a sistemas de referencia en las partes centrales de la nube (que supondremos representa al Universo observable) la condición de homogeneidad de la nube implicará que también se satisfaga la condición de isotropía del universo. Esta condición de homogeneidad e isotropía se conoce como *principio cosmológico* y es adoptado por la mayoría de los modelos de Universo. El principio cosmológico asegura que no existen en el universo observadores privilegiados; el universo se ve igual en todas las direcciones y desde cualquier punto de observación.

A fin de satisfacer razonablemente la condición de isotropía adoptaremos una nube de dimensiones tales que sus partes centrales tengan el tamaño del universo observable. La homogeneidad del universo impone una restricción en los movimientos en gran escala, permitiéndose solamente expansiones o contracciones uniformes, es decir, un cambio de escala del Universo. Si representamos por \vec{r}_0 al vector posición de un punto en la nube a partir de un cierto origen, en un instante de tiempo dado t_0 , el vector posición del punto en un instante t cualquiera se puede escribir como:

$$\vec{r} = R(t)\vec{r}_0$$

Donde $R(t)$ es el factor de escala del Universo en el instante t , adoptando $R(t_0)=R_0=1$ la velocidad del punto será:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\dot{R}}{R} \cdot \vec{r}$$

Que no es otra cosa que la ley de Hubble (la velocidad de expansión es proporcional a la distancia). Vemos entonces que:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

Donde $H(t)$ es la “constante” de Hubble para el instante t . Evidentemente la constante de Hubble resulta ser función del tiempo. Si representamos por $t = t_0$ al instante actual, entonces, recordando $R(t_0) = R_0 = 1$, tenemos:

$$H(t_0) = H_0 = \dot{R}(t_0) = 65(km \cdot seg^{-1} \cdot Mpc^{-1})$$

Veamos ahora la dinámica de la nube. Haremos una descripción utilizando el centro de la nube como origen. Si consideramos una masa “m”, situada a una distancia “r” del centro de la nube, esta será atraída por la materia contenida en una esfera de centro en el origen y radio “r”. La materia contenida fuera de esa esfera no afectará en forma neta a la masa puntual, solicitándola en todas direcciones con igual intensidad. De acuerdo con la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{G \cdot m \cdot M(r)}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Donde:

$$M(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\ddot{R}}{R} \cdot \vec{r}$$

Y

La segunda ley de Newton se reduce a lo siguiente, teniendo en cuenta las últimas dos ecuaciones:

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho = 0$$

Esta ecuación se puede simplificar si se utiliza la ecuación:

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t_o)} = \frac{R^3(t_o)}{R^3(t)}$$

Pero $R(t_o) = R_o = 1$ y $\rho(t_o) = \rho_o$. Entonces:

$$\rho_o = \rho \cdot R^3$$

Con esto la ecuación para R se transforma en:

$$R^2 \ddot{R} + \frac{4\pi}{3} G \rho_o = 0$$

Integrándola tenemos:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi \cdot G \cdot \rho_o}{3R} - k$$

Donde k es una constante de integración. Esta ecuación es del mismo tipo que la ley de conservación de la energía. El valor del parámetro k definirá totalmente el tipo de universo. Podemos distinguir tres casos:

i) $k = 0$

En este caso la nube puede expandirse hasta el infinito, pero

$$\dot{R} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

Integrando la ecuación se obtiene:

$$R = (6\pi G \rho)^{1/3} \cdot t^{2/3}$$

El factor de escala R crece proporcional a $t^{2/3}$. Este modelo de universo se conoce como el modelo de Einstein-de Sitter.

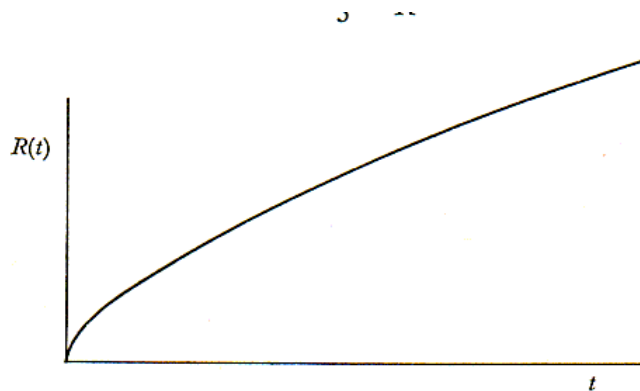


Fig. 37. The scale factor of the Universe $R(t)$ for a Newtonian model with zero total energy, or a relativistic model with zero pressure and space curvature (the Einstein-de Sitter model).

ii) $k > 0$

En este caso la nube está ligada gravitacionalmente. El Universo no puede expandirse más allá de un factor de escala máximo, ya que el segundo miembro de la ecuación no puede ser negativo, por estar igualado a una cantidad positiva-definida. La nube alcanza un radio máximo cuando \dot{R} es cero. Resulta:

$$R_{max} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{G\rho_o}{k}$$

En este caso tenemos un universo cerrado, oscilatorio. La curva $R(t)$ es una cicloide.

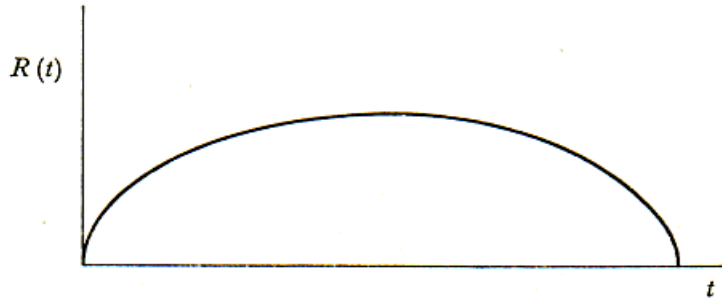


Fig. 38. The scale factor of the Universe for a gravitationally bound model.

iii) $k < 0$

En este caso la nube no estaría ligada gravitacionalmente. Representa un universo abierto. No habría ninguna restricción para R . La ecuación para R punto no puede integrarse analíticamente, tal como en el caso anterior. Podemos sin embargo observar su comportamiento para valores extremos de R .

- a) $R \ll 1$ ($t \ll t_0$) $R(t) \propto t^{2/3}$
- b) $R \gg 1$ ($t \gg t_0$) $R(t) \propto t$



Fig. 39. The scale factor of the Universe for a gravitationally unbound model.

Willem de Sitter: 1872–1935

Willem de Sitter was born in Sneek, Friesland (a northern province of Holland). After completing his preliminary education at the gymnasium in Arnheim, he enrolled in the University at Groningen. Although he intended to study mathematics, he was irresistibly drawn to astronomy. The year 1896 marked one of the most important events in his life. He met Sir David Gill, the director of the Royal Observatory at the Cape of Good Hope, who was so impressed with de Sitter's abilities as a measurer of photographic plates that he invited de Sitter to work with him at the Cape.

De Sitter waited until 1897 in order to finish his doctoral examinations and then joined Gill at the Cape, where he remained for two years. There he worked on a photographic photometric program to study the differences in colors of stars near the Milky Way plane and those near the galactic poles. He also began a project that became his passion throughout his life—a study of the satellites of Jupiter. De Sitter worked on this theme for more than 30 years, publishing some 30 major papers on the subject.

He returned to Groningen in 1899 and remained there until 1908, when he was appointed a professor of astronomy at the University in Leiden. Although his major interest remained in celestial mechanics, he published several papers on the theory of relativity beginning in 1911. De Sitter was one of the first scientists to appreciate the new theory. He worked out the astronomical consequences of Einstein's general theory in the period 1916–1917, and developed what has become known as the “de Sitter Universe”—a cosmological model that predicted redshifts of lines in the spectra of distant objects.

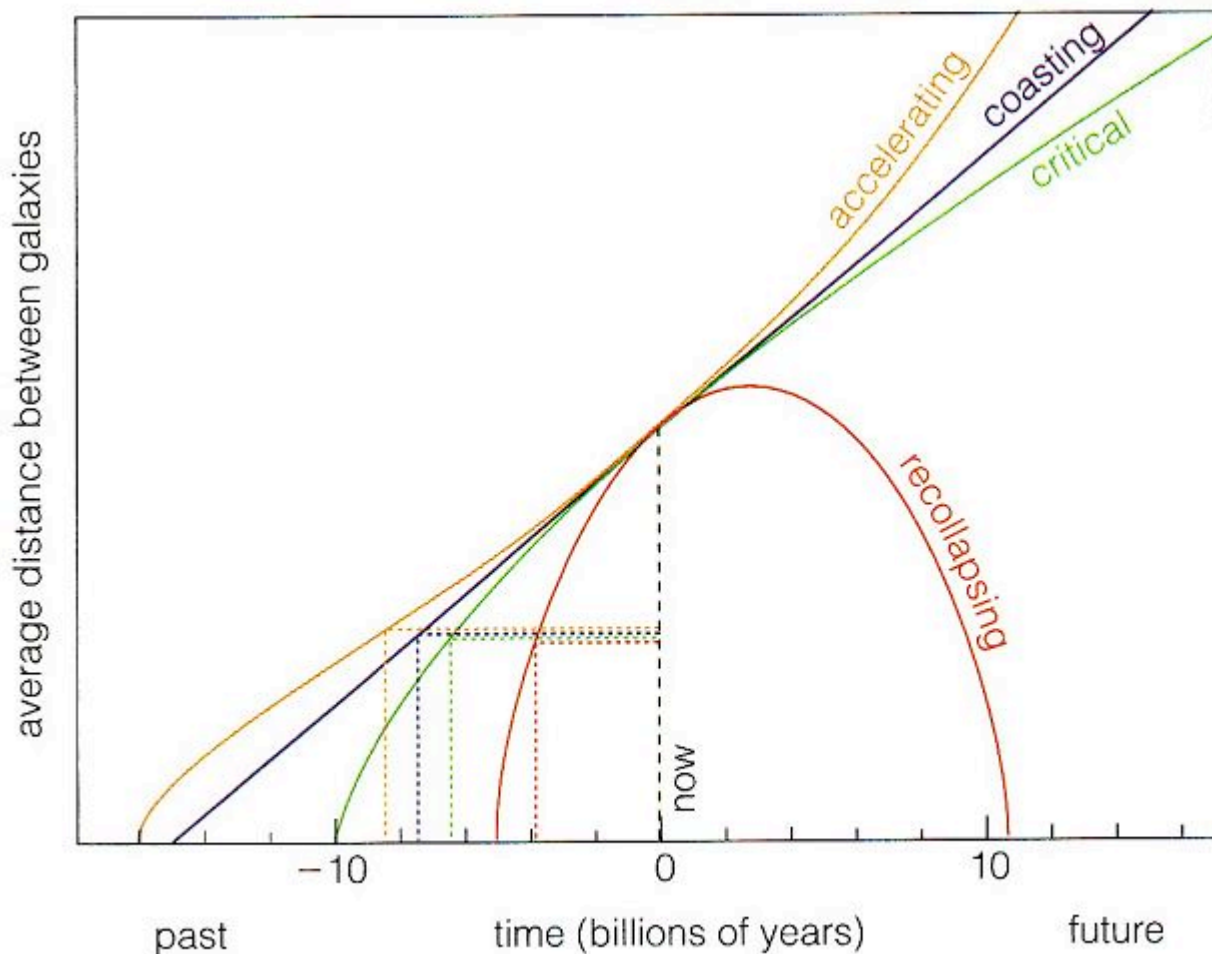
In 1919, he was appointed director of the observatory at Leiden and worked closely with Kapteyn to make the institution one of the foremost in the world. His abilities as an administrator also won him the presidency of the International Astronomical Union, a post he held from 1925 to 1928.

De Sitter received many honors, including the Gold Medals of the Royal Astronomical Society, the Astronomical Society of the Pacific, and the American National Academy of Sciences.



A drawing of DeSitter. (Yale University photograph)

FIGURE 21.17 Four different models for the expansion of the universe. Each curve shows how the average distance between galaxies changes with time. A rising curve means that the universe is expanding, and a falling curve means that the universe is contracting. All the curves are aligned at the time labeled “now,” where the expansion rate and average distance between galaxies are the same for all the models. Note that the lookback time to the birth of the universe, which is the moment at which the average distance between galaxies is essentially zero, depends on how strongly gravity affects the expansion rate. If gravity is strong enough to slow the universe’s expansion, as in the critical and recollapsing universe models, the lookback time is relatively short—10 billion years or less. In the coasting and accelerating universe models, the pull of gravity is relatively weak, and the lookback time to the birth of the universe is closer to 16 billion years. Observations of distant white dwarf supernovae suggest that the universe is indeed accelerating and is destined to expand forever.



2.11.3. Edad del Universo:

Como se explicara anteriormente, la edad del Universo, t_0 , debe ser menor que el tiempo de Hubble, τ , en cualquiera de los tres casos posibles, debido a la autogravedad del Universo.

En el caso del universo de Einstein-de Sitter ($k=0$), utilizando la ecuación para R en función de t se obtiene:

$$\tau = \frac{1}{H} = \frac{R}{\dot{R}} = \frac{3}{2} \cdot t_0$$

$$t_0 = \frac{2}{3} \cdot \tau$$

Es fácil ver que ese valor de t_0 es valor crítico. Si $k > 0$ la desaceleración es mayor y en ese caso la edad sería menor que $2/3$ de τ . Si $k < 0$, en ese caso la edad del Universo t_0 sería mayor que $(2/3)\tau$.

En resumen:

$$k > 0 \quad t_0 < \frac{2}{3} \tau$$

$$k = 0 \quad t_0 = \frac{2}{3} \tau$$

$$k < 0 \quad t_0 > \frac{2}{3} \tau$$

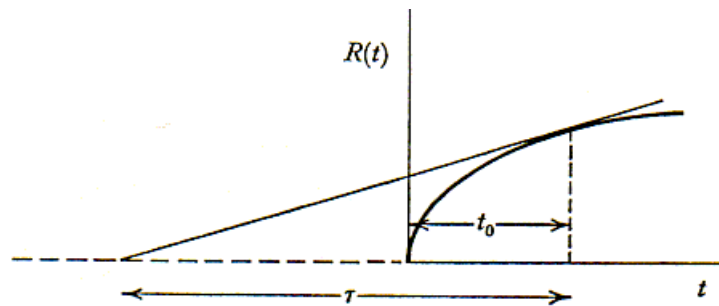


Fig. 40. The age of the Universe t_0 is always less than the Hubble constant τ (which is determined by the tangent to the $R(t)$ curve).

2.11.4. Parámetro de desaceleración:

La desaceleración del universo queda representada por la segunda derivada del factor de escala con respecto al tiempo.

$$\text{Desaceleración} \propto -\ddot{R}$$

Para representar la desaceleración en los distintos modelos de universo se utiliza, por simplicidad de cálculo, un parámetro sin dimensiones que se representa por la letra q , y se define:

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}$$

Utilizando las ecuaciones anteriores se puede demostrar que el parámetro de desaceleración así definido se puede escribir como:

$$q = \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho(t)}{H^2(t)}$$

El parámetro de desaceleración es función del tiempo, ya que ρ y H lo son. En el caso particular del Universo de Einstein –de Sitter el parámetro q no depende del tiempo y vale siempre 0,5. Así tenemos que:

$k > 0$	$q > \frac{1}{2}$
$k = 0$	$q = \frac{1}{2}$
$k < 0$	$q < \frac{1}{2}$

2.11.5. Densidad del Universo:

La última ecuación que nos da el valor de q en función de la densidad y el valor de H nos indica que para un cierto valor de la constante de expansión H la desaceleración depende exclusivamente de la densidad del Universo.

Veamos separadamente los tres casos:

a) Si $k = 0$ entonces $q = 0,5$

Utilizando la última ecuación podemos calcular el valor de la densidad en el momento actual que haría que el parámetro q tuviese el valor crítico 0,5. Esa densidad se denomina densidad crítica y está dada por:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Para una constante de Hubble de $67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

$$\rho_c \sim 8,4 \times 10^{-30} \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$$

b) Si $k > 0$ entonces $q > 0,5$ y en ese caso como:

$$q = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_c}$$

entonces $\rho > \rho_c$

Se define el parámetro Ω como una medida de la densidad del universo en unidades de la densidad crítica:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$

c) Si $k < 0$ entonces $q < 0,5$ y en ese caso

$$\rho < \rho_c$$

La cantidad de materia que se puede detectar en forma de cúmulos de galaxias si se distribuyese uniformemente representaría una densidad media del universo de:

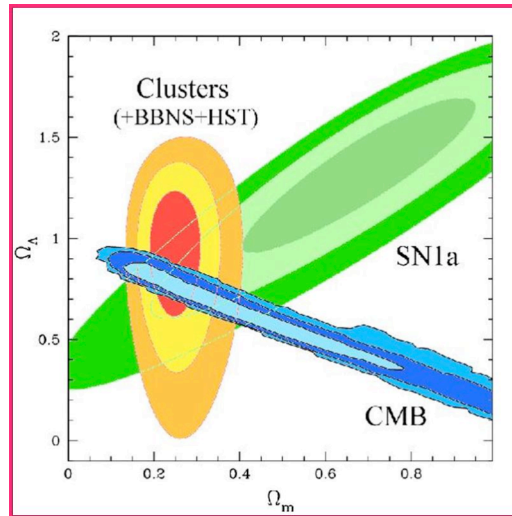
$$\rho_{\text{galaxias}} \sim 10^{-30} \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Por lo tanto, si lo que vemos en el universo fuese todo lo que existiera, podríamos afirmar que el universo es abierto. Sin embargo se sabe que existe una gran cantidad de materia oscura tanto en nuestra galaxia como en otras galaxias y al interior de cúmulos de galaxias. La materia oscura supera a la materia visible en la razón diez es a uno. Por lo tanto no podemos afirmar categóricamente que, basado en las observaciones el universo sea abierto.

Recientemente, en 1998, estudiando supernovas distantes para medir directamente la desaceleración del universo se obtuvo el sorprendente resultado que el universo, en gran escala parece estar acelerando. Eso ha llevado a tener que reconsiderar la proposición de Einstein de una constante cosmológica Λ distinta de cero y que sea responsable de la aceleración observada.

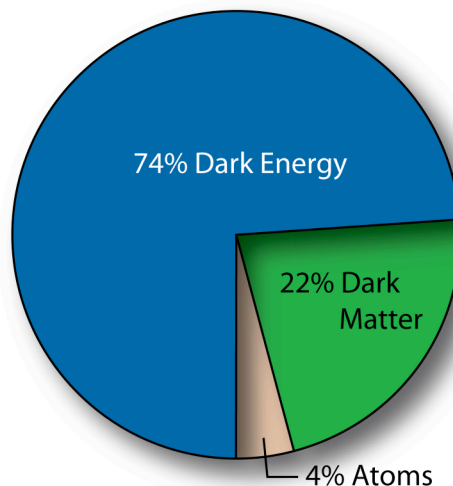
Se define la razón entre la densidad sobre la densidad crítica como el parámetro Ω . Si $\Omega = 1$ en ese caso estamos en un universo crítico equivalente a $q = 0,5$. Para

incluir al parámetro Λ el parámetro Ω se lo descompone en un Ω de la materia llamado Ω_M y en un Ω de lambda llamado Ω_Λ tal que $\Omega_T = \Omega_M + \Omega_\Lambda$.



Las supernovas, las radiación cósmica de fondo (CMB) y los cúmulos de galaxias sugieren $\Omega_\Lambda = 0,74$ y $\Omega_M = 0,3$, con $\Omega_T = 1$

Los estudios de supernovas distantes, hasta corrimiento al rojo $z \sim 1$, han indicado que $\Omega = 1$ pero con un $\Omega_M = 0,26$ y con un $\Omega_\Lambda = 0,74$. Esto indicaría que el universo tiene justo la energía necesaria para ser crítico, es decir con una geometría global euclídeana. Sin embargo sólo el 26% de la energía del universo está asociada con la materia y el 74% de la energía del universo es energía oscura, asociada con el vacío. Dado que sólo es visible el 15% de la materia siendo el 85% restante materia oscura, eso significa que vemos algo como el 4% de la energía del universo, un 22% es materia oscura y el 74% restante es energía oscura.



De la energía total del universo, el 74% está asociada al vacío (energía oscura), el 22% está asociada a la materia oscura y sólo el 4% está asociada a la materia bariónica (los átomos).

Hemos caminado un largo camino desde Aristóteles. Según el estagirita la naturaleza tiene horror al vacío; según la cosmología contemporánea el vacío “maneja” el 70% de la energía del universo. Tal vez Aristóteles tuvo siempre la razón pues el vacío “maneja” más del doble de la energía que maneja “lo no vacío” del universo. Hay algo profundamente desconocido en la física actual que nos conduce a “explicar” como energía del vacío a la mayor parte de la energía del universo. Probablemente tendremos que cambiar nuestra semántica pero también tendremos que cambiar la física.

Referencia:

A. Liddle 2003 *“An Introduction to Modern Cosmology”*, Wiley, Chichester, U.K.

John North *“The Fontana History of Astronomy and Cosmology”* Fontana Press, 1994.

D.W Sciama 1975 *“Modern Cosmology”*, Cambridge University Press, Cambridge.