

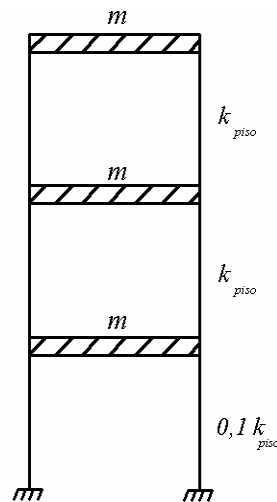
Control 2

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

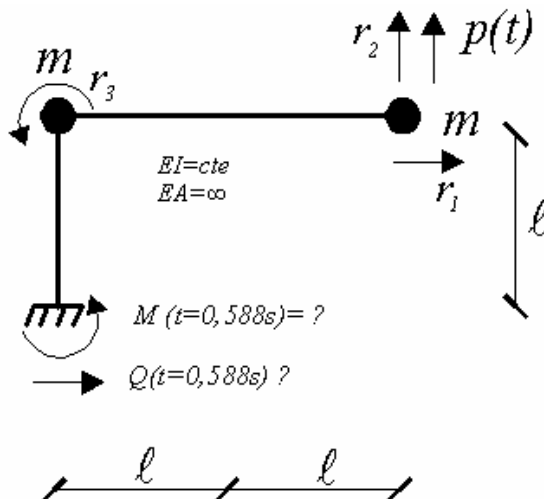
Viernes 2 de Noviembre de 2006

P1. Para la estructura que se muestra en la figura, determine el valor de “ k ” de modo que el período fundamental sea $1,5 \text{ seg}$, luego determine la matriz de masa, la matriz de rigidez, las formas modales (dibujar), los períodos, y los factores de participación modal (debe normalizar a “1” los valores relacionados al piso superior en las formas modales, y proseguir sus cálculos con estos vectores):



$$m = 20 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

P2. Para la estructura que se muestra en la figura sometida a un impacto vertical corto, determine el corte basal, el momento basal y los desplazamientos que se indican, para un tiempo igual a: $t = 0,588 \text{ seg}$. Utilice los datos que se dan.



$$r_1(t = 0,588s) = ?$$

$$r_2(t = 0,588s) = ?$$

$$r_3(t = 0,588s) = ?$$

$$M(t = 0,588s) = ?$$

$$Q(t = 0,588s) = ?$$

$$\beta_1 = 5\%$$

$$\beta_2 = 3\%$$

$$l = 1\text{m}$$

$$EI = 55,276 \text{ kgf} \times \text{m}^2$$

$$m = 1 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

Notar que el problema continúa en la Próxima página.

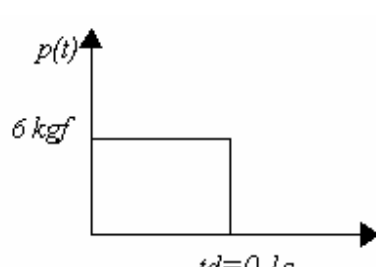
Control 2

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 2 de Noviembre de 2006

P2. Continuación....



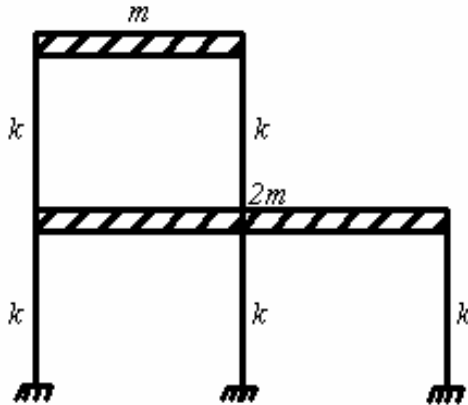
$td = 0,1 s$

$$[K] = \begin{bmatrix} 12EI/\ell^3 & 0 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 3EI/8\ell^3 & -3EI/4\ell^2 \\ 6EI/\ell^2 & -3EI/4\ell^2 & 11EI/2\ell \end{bmatrix} \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6,317 & 0,317 \end{bmatrix}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 2,233 \\ 0,500 \end{Bmatrix} seg$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} 60 & 9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \frac{EI}{11 \cdot \ell^3} \quad [\tilde{M}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot m$$

P3. Para la estructura que se muestra en la figura, determine el corte basal máximo, los desplazamientos máximos de piso, los desplazamientos relativos máximos de entre piso, para ello emplee como criterio de combinación modal el SSRS (media cuadrática) y emplee los datos ya calculados que se entregan.



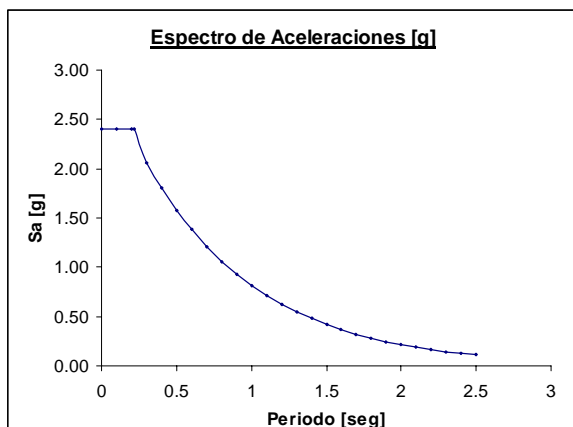
$$[M] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \frac{kgf}{m}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,593 & -0,843 \end{bmatrix}$$

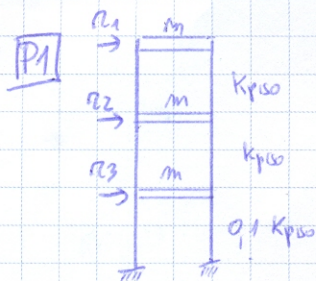
$$Lm = \begin{Bmatrix} 21,86 \\ -6,86 \end{Bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

$$T = \begin{Bmatrix} 0,697 \\ 0,327 \end{Bmatrix} seg$$



$$Sa = \begin{cases} 2,4g & si \ 0 \leq T \leq 0,22seg \\ 3,071g \times e^{-1,33 \cdot T} & si \ 0,22seg < T \end{cases}$$

Control 2 CI426



$$m = \frac{20 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$T_1 = 1,5 \text{ seg.}$$

• Matriz de masa y rigidez

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{20 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot K_{piso} \quad \checkmark 1,0$$

• Calculando los valores / vectores propios de $(M^{-1} \cdot K)$:

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 3,153 \times 10^{-2} \\ 3,017 \\ 1,051 \end{pmatrix} \cdot \frac{K_{piso}}{m} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3,153 \times 10^{-2}}} \times \sqrt{\frac{m}{K_{piso}}} \quad \checkmark 1,0$$

$$\Rightarrow K_{piso} = \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{m}{3,153 \times 10^{-2}} \Rightarrow K_{piso} = \left(\frac{2\pi}{1,5} \right)^2 \cdot \frac{20 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2}{3,153 \times 10^{-2} \text{ m}} = 11130,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}} \quad \checkmark 1,0$$

• Luego:

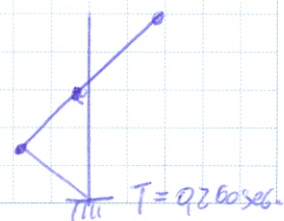
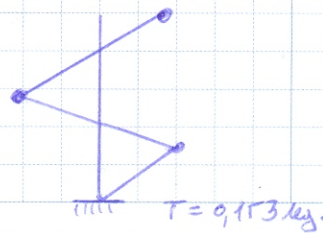
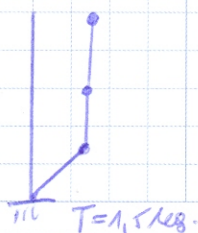
$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{20 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1,1 \end{bmatrix} \cdot 11130,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 17,546 \\ 1679,15 \\ 184,99 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 4,188 \\ 40,977 \\ 13,618 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1,500 \\ 0,153 \\ 0,260 \end{pmatrix} \text{ seg.}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & -0,496 & -0,954 \\ 0,968 & 1 & 0,049 \\ 0,906 & -0,522 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,968 & -2,017 & -0,051 \\ 0,906 & 1,052 & -1,049 \end{bmatrix} \quad \checkmark 2,0$$

Dibujando la Formas.

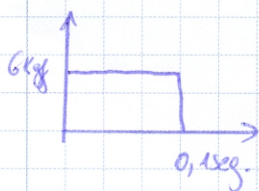
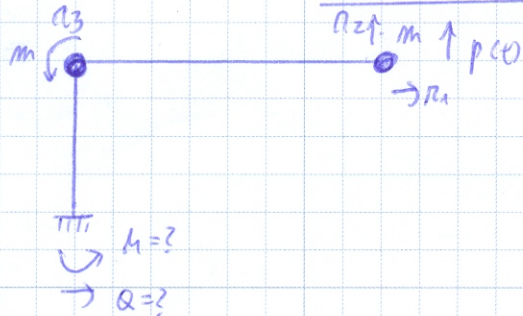


• Los FACTORES de participación modal $L_m = [\Phi]^T [M] \{r\}$.

Al ser un edificio de corte clásico $\{r\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$$\Rightarrow L_m = \begin{pmatrix} 57,50 \\ 0,70 \\ -2,00 \end{pmatrix} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad \checkmark \quad 1,0$$

Control 2 CI 426



$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6,317 & 0,317 \end{bmatrix}$$

0,5

$T = \begin{pmatrix} 2,233 \\ 0,500 \end{pmatrix} \text{ seg.} \Rightarrow \frac{t_d}{T} < 0,25 \quad \left(\frac{0,1}{2,233} = 0,045, \frac{0,1}{0,5} = 0,2 < 0,25 \right)$

\Rightarrow se puede emplear impacto de conta pura ción.

Tenemos:

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [C] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} \quad / \quad [\Phi]^T \quad \text{, donde } \{u(t)\} = [\Phi] \{y(t)\}$$

$\Rightarrow [M_m] [\ddot{V}(t)] + [2M_m \rho_m \omega_m] \dot{V}(t) + [k_m] V(t) = [\Phi]^T \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$

$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{K_{gf} s^2}{m} \Rightarrow M_m = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 41,9 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{bmatrix} \frac{K_{gf} s^2}{m}$

$[K] = \begin{bmatrix} 60 & 9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{112^3} \text{ con } EI = 55,276 K_{gf} m^2, l = 1m \Rightarrow [k_m] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} 331,69 & 0 \\ 0 & 331,69 \end{bmatrix} \frac{K_{gf}}{m}$

Luego utilizando la aproximación a impacto de conta pura ción

$$Y(t) = \frac{1}{M_m \omega_d} \cdot \left(\int_0^t \tilde{p}_i(t) dt \right) \cdot e^{-\beta_i \omega_i t} \cdot \sin(\omega_i \sqrt{1 - \beta_i^2} \cdot t)$$

$\tilde{p}(t) = [\Phi]^T \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,317 \\ 0,317 \end{pmatrix} \cdot p(t)$

Además $\omega = \begin{pmatrix} 12,566 \\ 2,813 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$, Al resolver $\omega = \begin{pmatrix} 2,813 \\ 12,566 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$ $\beta = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,03 \end{pmatrix}$

Luego

$$Y_1(t) = \frac{1}{41,9 \cdot 2,813 \cdot \sqrt{1-0,05^2}} \cdot (-6,817 \cdot 6 \cdot 0,1) \cdot e^{-0,05 \cdot 2,813 t} \cdot \sin(2,813 \cdot \sqrt{1-0,05^2} \cdot t)$$

0,5

$$Y_2(t) = \frac{1}{2,1 \cdot 12,566 \cdot \sqrt{1-0,03^2}} \cdot (0,317 \cdot 6 \cdot 0,1) \cdot e^{-0,03 \cdot 12,566 t} \cdot \sin(12,566 \cdot \sqrt{1-0,03^2} \cdot t)$$

0,5

evaluado para $t = 0,588 \text{ seg.}$

$$\Rightarrow Y_1(t = 0,588 \text{ seg}) = -0,0295 \text{ m}$$

$$Y_2(t = 0,588 \text{ seg}) = 0,0052 \text{ m.}$$

0,5

$$\text{Luego } r(t) = [\Phi] \cdot Y = \begin{pmatrix} -0,024 \\ 0,188 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} r_1(0,588 \text{ seg}) \\ r_2(0,588 \text{ seg}) \end{pmatrix}$$

0,5

$$\text{Luego } r_3 = -K_{pp}^{-1} \cdot K_{pe} \cdot r_2$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \underbrace{12EI/l^3}_{K_{ee}} & 0 & \underbrace{6EI/l^2}_{K_{ep}} \\ 0 & \underbrace{3EI/l^3}_{K_{ee}} & \underbrace{-3EI/l^2}_{K_{ep}} \\ \underbrace{6EI/l^2}_{K_{ep}} & \underbrace{-3EI/l^2}_{K_{ep}} & \underbrace{1EI/l}_{K_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$r_3 = -\frac{2l}{1EI} \cdot \left(6 - \frac{3}{4} \right) \frac{EI}{l^2} \cdot \begin{pmatrix} -0,024 \\ 0,188 \end{pmatrix}$$

0

$$r_3 = 0,0522 \text{ rad. } (t = 0,588 \text{ seg}).$$

- Calculando el conte y el momento a la base para $t = 0,588 \text{ seg}$.

$$Q_{base} = \frac{12EI}{l^3} \times R_1 + \frac{6EI}{l^2} \times R_3 = \frac{12 \cdot 55,276}{l^3} \times -0,024 + \frac{6 \cdot 55,276}{l^2} \cdot 0,0522$$

$$Q_{base} (t = 0,588 \text{ seg}) = 1,393 \text{ Kgf.}$$

0,5

$$M_{base} (t = 0,588) = \frac{6EI}{l^2} \times R_1 + \frac{2EI}{l} \times R_3 = \frac{6 \times 55,276}{l^2} \times -0,024 + \frac{2 \cdot 55,276}{l} \times 0,0522$$

$$M_{base} = -2,189 \text{ Kgf} \cdot \text{m}$$

0,5

- Matriz de Rigidez

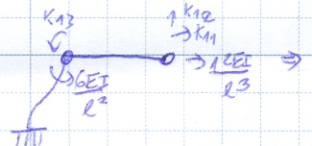
$$\bullet \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\bullet \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0$$

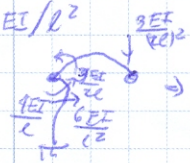
$$\Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} K_{21} &= 0 \\ K_{22} &= 3/8 EI/l^2 \\ K_{23} &= -3/4 EI/l^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\tilde{K}] = [K_{11}] - [K_{13}][K_{33}]^{-1}[K_{31}]$$



$$\begin{aligned} K_{11} &= 12EI/l^3 \\ K_{12} &= 0 \\ K_{13} &= 6EI/l^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} K_{21} &= 0 \\ K_{22} &= 3EI/l^2 \\ K_{23} &= -3/4 EI/l^2 \end{aligned}$$

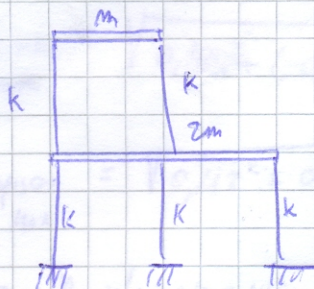
$$\bullet \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 0 \\ 0 & 3EI/l^2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3/4 \end{pmatrix} \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 6 & -3/4 \end{pmatrix} \frac{l}{EI} \cdot \left(\frac{EI}{l^2} \right)^2$$

$$[\tilde{K}] = \left(\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3} - \begin{bmatrix} 6^2 \cdot 2/11 & -6 \cdot 3/4 \cdot 11 \\ -6 \cdot 3 \cdot 2/4 \cdot 11 & (3/4)^2 \cdot 2/11 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3} \right) = \left(\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 72/11 & -9/11 \\ -9/11 & 9/88 \end{bmatrix} \right) \frac{EI}{l^3}$$

$$\Rightarrow [\tilde{K}] = \begin{bmatrix} 60/11 & 0/11 \\ 0/11 & 3/11 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}$$

P3



$$[M] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf}}{\text{m}}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ +0,543 & -0,843 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,697 \\ 0,327 \end{pmatrix} \quad L_m = \begin{pmatrix} 21,86 \\ -6,86 \end{pmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$Q_m = \frac{L_m^T}{M_m} S_e(T, p)$$

$$M_m = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 17,033 & 0 \\ 0 & 24,213 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$S_e(T) = \begin{pmatrix} 11,91 \\ 19,48 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow Q_m = \begin{pmatrix} 334,13 \\ 37,86 \end{pmatrix} \text{kgf} \Rightarrow Q_k = \sqrt{334,13^2 + 37,86^2} = 336,27 \text{kgf}$$

• desplazamiento máximo

$$Y_{max} = \frac{L_m}{M_m} \cdot \frac{S_e(T)}{\omega^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \begin{pmatrix} 9,01 \\ 19,21 \end{pmatrix} \text{rad/seg}$$

$$\Rightarrow Y_{max} = \begin{pmatrix} 0,188 \\ -0,015 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\text{Luego: } W_{1,max} = \phi_1 \cdot Y_{max_1} = \begin{pmatrix} 0,188 \\ 0,112 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$W_{2,max} = \phi_2 \cdot Y_{max_2} = \begin{pmatrix} -0,015 \\ 0,013 \end{pmatrix} \text{m}$$

- Luego los desplazamientos máximos de piso son: (SRSS)

$$u_{piso1}^{max} = \sqrt{0,188^2 + (-0,015)^2} = 0,189 \text{ m.} \quad (0,5)$$

$$u_{piso2}^{max} = \sqrt{0,112^2 + 0,013^2} = 0,112 \text{ m.} \quad (0,5)$$

- Desplazamientos máximos relativos de entre piso.

$$u_{rel}^{piso1} = \sqrt{(0,188 - 0,112)^2 + (-0,015 - 0,013)^2} = 0,081 \text{ m} \quad (0,6)$$

$$u_{rel}^{piso2} = u_{piso2} = 0,112 \text{ m.} \quad (0,5)$$