

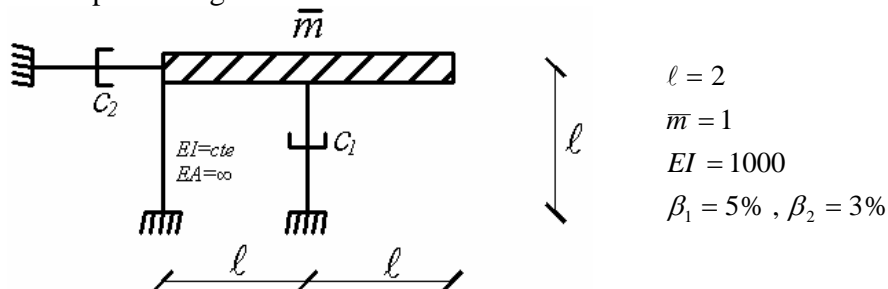
## Ejercicio 7

### CI42G Dinámica de Estructuras

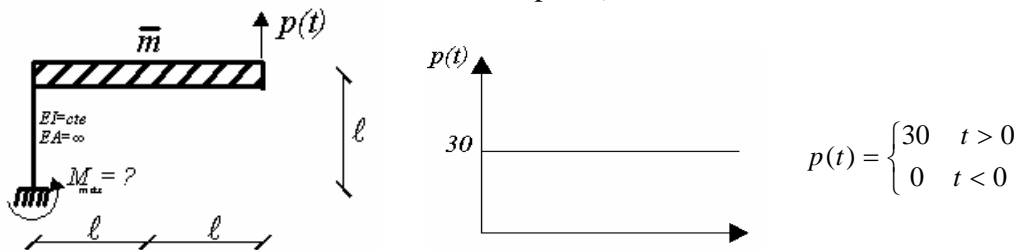
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.  
Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 20 de Octubre de 2006

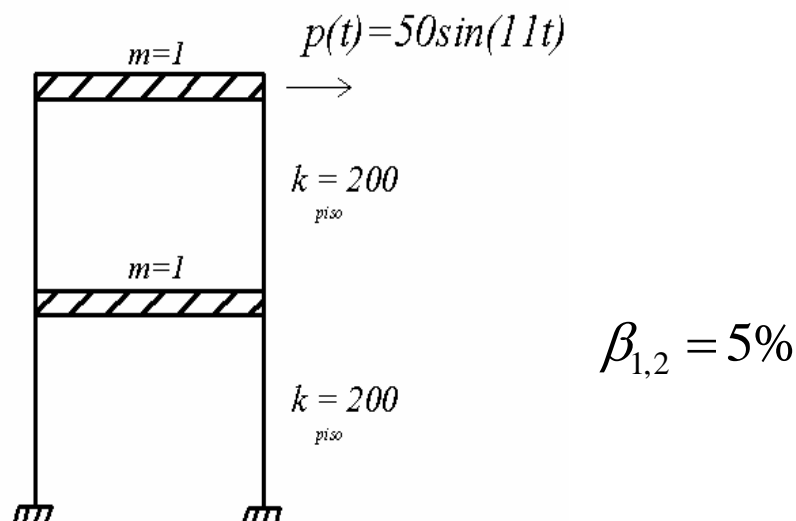
**P1. a)** Para la estructura que se muestra en la figura determine las constantes de amortiguamiento ( $c_1, c_2$ ) de modo que la razón de amortiguamiento del modo fundamental sea un 5% y un 3% para el segundo modo.



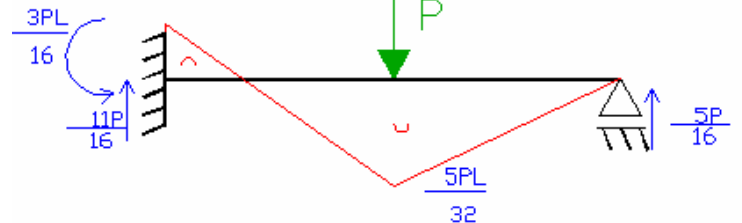
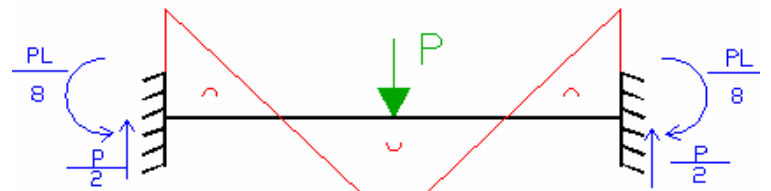
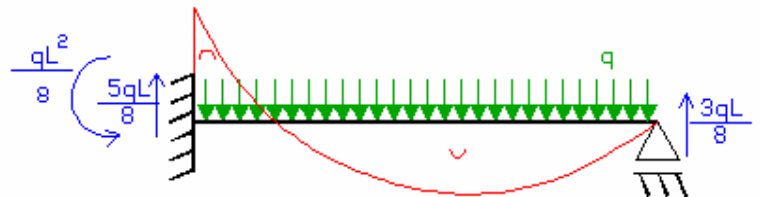
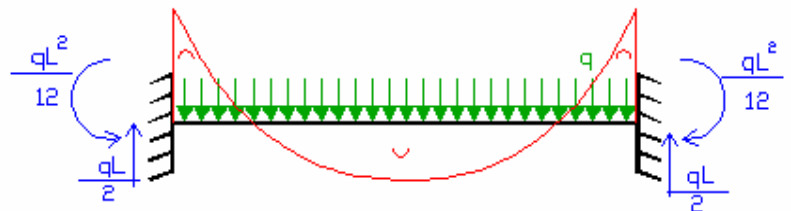
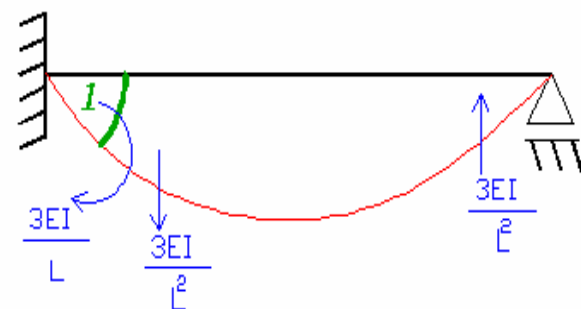
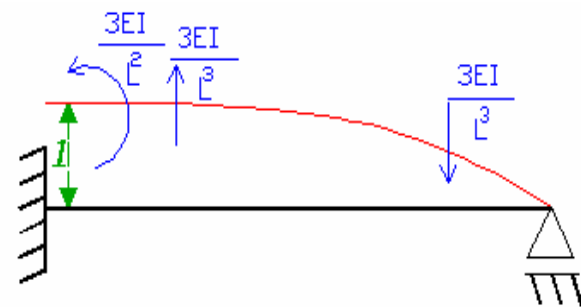
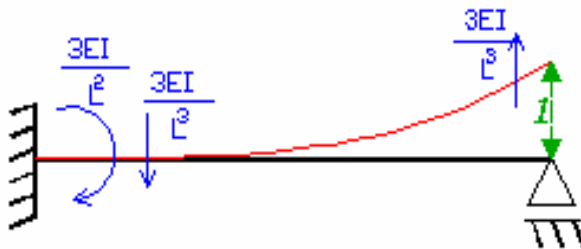
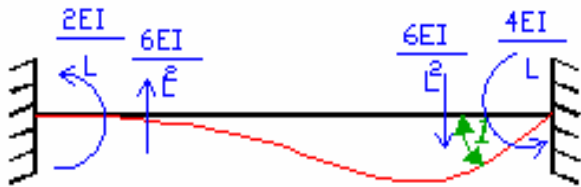
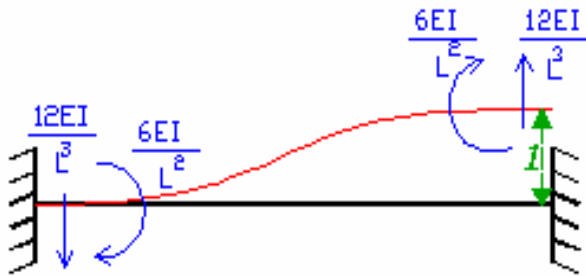
**b)** Considerando la estructura anterior, pero eliminando los amortiguadores ( $c_1 = c_2 = 0$ ). Determine el máximo momento producido en la base de la columna debido a una carga infinita  $p(t) = 30$   $t > 0$ . (hint: Utilice teoría de impacto).



**P2.** Para la estructura que se muestra en la figura determine los desplazamientos máximos de piso y los desplazamientos máximos relativos de entre piso. Considere solo el régimen permanente. Se considera una razón amortiguamiento de un 5% para todos sus modos.

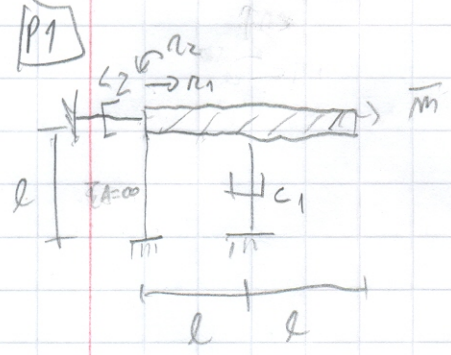


**Tabla Básica de Rigidez**  
**CI42G Dinámica de Estructuras**  
**Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.**  
**Aux: Francisco Hernández Prado.**



Tipo de Simetría						
	Plana		Axial		Puntual	
	S	A	S	A	S	A
Nx	?	0	?	0	?	0
Ny	0	?	0	?	?	0
Nz	0	?	?	0	?	0
Mx	0	?	?	0	0	?
My	?	0	0	?	0	?
Mz	?	0	?	0	0	?

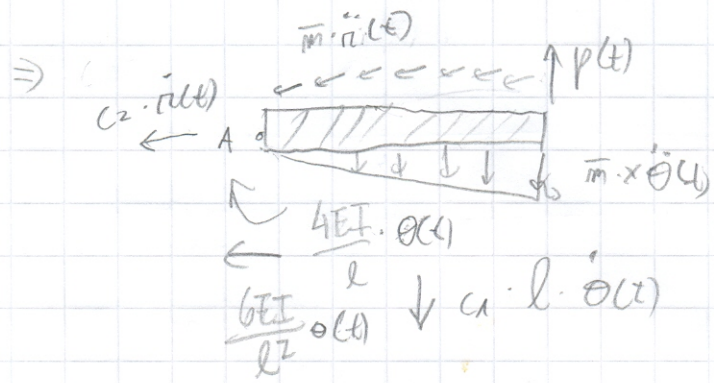
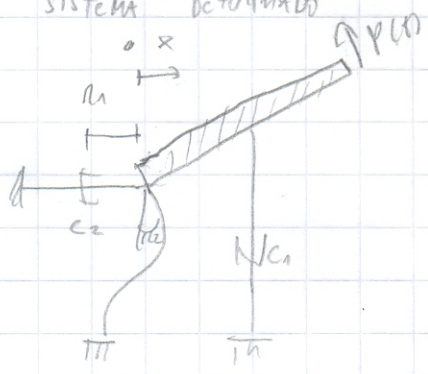
P1



$p_1 = 8\%$     $p_2 = 3\%$   
 $l = 2$     $\bar{m} = 1$     $EI = 1000$

$[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$ .

Supongamos el sistema deformado



$\Rightarrow$  Debemos tener  $\sum H_A = 0$ ,  $\sum F_A = 0$

$\frac{6EI}{l^2} \cdot r(t)$

$\Rightarrow \sum F_A:$   
 $\bar{m} l \cdot \ddot{r}(t) + c_2 \dot{r}(t) + \frac{6EI}{l^2} \theta(t) + \frac{12EI}{l^3} r(t) = 0$

$\uparrow \sum M_A = 0$

$\sum M_A:$   
 $\int_0^{2l} \bar{m} x^2 \ddot{\theta}(t) dx + c_1 l^2 \ddot{\theta}(t) + \frac{4EI}{l} \theta(t) + \frac{6EI}{l^2} r(t) = 0$   
 $= p(t) \cdot 2l$

$$\Rightarrow \bar{m} \cdot \frac{(2l)^3}{3} \ddot{\theta}(t) + c_1 l^2 \dot{\theta}(t) + \frac{4EI}{l} \theta(t) + \frac{6EI}{l^2} r(t) = 2l p(t)$$

$$2\bar{m}l \ddot{r}(t) + c_2 \dot{r}(t) + \frac{6EI}{l^2} \theta(t) + \frac{12EI}{l^3} r(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} [M] \\ \begin{bmatrix} 2\bar{m}l & 0 \\ 0 & 8\bar{m}l^3/3 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} + \begin{matrix} [C] \\ \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_1 l^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} + \begin{matrix} [K] \\ \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2l p(t) \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos las formas modales y pernos de la ESTRUCTURA:

$$\text{eig}([M]^{-1}[K]) \Rightarrow \omega^2 = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \vee \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

podemos suponer la solución:  $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \phi_1 \cdot z_1(t) + \phi_2 \cdot z_2(t) = [\Phi] \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = [\Phi] \cdot Z(t)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \phi_1 \dot{z}_1(t) + \phi_2 \dot{z}_2(t) \quad \vee \quad \begin{pmatrix} \ddot{r}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \phi_1 \ddot{z}_1(t) + \phi_2 \ddot{z}_2(t) = [\Phi] \ddot{Z}(t)$$

Reemplazando en la cc de mov.

$$[M][\Phi]\{\ddot{Z}(t)\} + [C][\Phi]\{\dot{Z}(t)\} + [K][\Phi]Z(t) = F(t)?$$



Si premultiplicamos por  $[\Phi]^T$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{Z}(t)\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \dot{Z}(t) + [\Phi]^T [K] [\Phi] Z(t) = [\Phi]^T F(t)$$

Luego se va a tener que:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [M_m] \quad \text{MATRIZ DE MASA MODAL}$$

$$M_{m,ij} \neq 0 \quad \text{si } i=j \quad i=1,2$$

$$M_{m,ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad i=1,2$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [K_m] \quad \text{MATRIZ DE RIGIDEZ MODAL}$$

$$K_{m,ij} \neq 0 \quad \text{si } i=j \quad i=1,2$$

$$K_{m,ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad i=1,2$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [C_0]$$

los términos fuera de la diagonal  
no necesariamente son 0.

En la práctica se pueden despreciar los términos fuera de la diagonal de  $[C_0]$ , (Penzien-Wilson).

$$[M_m] \{\ddot{Z}(t)\} + [K_m] \{Z(t)\} + [C_0] \{\dot{Z}(t)\} = F'(t)$$

En caso que  $C_0$  tenga los términos fuera de la diagonal  $\neq 0$  el sistema se puede representar como la solución de  $n$  EOL independientes llamados ecuaciones modales

$$M_1 \ddot{z}_1(t) + K_1 z_1(t) + C_{0,1,2} \dot{z}_1(t) = F'_1(t)$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) + K_2 z_2(t) + C_{0,2,2} \dot{z}_2(t) = F'_2(t)$$

evaluando los resultados para

$$l=2 \quad m=1 \quad EI=1000 \quad p=2$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 21,3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1500 & 1500 \\ 1500 & 2000 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1,42 \\ 0,296 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0,726 & 0,981 \\ -0,688 & 0,194 \end{pmatrix}$$

$$[M_m] = \begin{bmatrix} 12,203 & 0 \\ 0 & 4,653 \end{bmatrix} \quad [K_m] = \begin{bmatrix} 239 & 0 \\ 0 & 2090 \end{bmatrix}$$

Luego  $C_0 = \Phi^T [C] \Phi$  es:

$$[C_0] = \begin{pmatrix} 0,726 & -0,688 \\ 0,981 & 0,194 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & cl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,726 & 0,981 \\ -0,688 & 0,194 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [C_0] = \begin{pmatrix} 0,726 & -0,688 \\ 0,981 & 0,194 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,726 C_2 & 0,981 C_2 \\ -0,688 cl^2 & 0,194 cl^2 \end{pmatrix}$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} (0,726)^2 C_2 + (0,688)^2 cl^2 & (0,981 \cdot 0,726) C_2 - (0,688 \cdot 0,194) cl^2 \\ (0,981 \cdot 0,726) C_2 - (0,194 \cdot 0,688) cl^2 & (0,981)^2 C_2 + (0,194) cl^2 \end{bmatrix}$$

Si se desprecian los términos fuera de la diagonal.

$$\begin{matrix} [C_0]^* \\ [C_m]^* \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} (0,726)^2 C_2 + (0,688)^2 cl^2 & 0 \\ 0 & (0,981)^2 C_2 + (0,194) cl^2 \end{bmatrix}$$



$$\text{Luego } p_m = \frac{C_m}{Z h_m \cdot u_m} = \frac{C_m}{Z \sqrt{K_m \cdot h_m}}$$

Si imponemos  $p_1 = 5\%$  y  $p_2 = 3\%$

$$\Rightarrow \frac{(0,726)^2 C_2 + (0,688)^2 C_1 l^2}{Z \sqrt{239 \cdot 12,203}} = 0,05 \quad (1)$$

$$\frac{(0,981)^2 C_2 + (0,194)^2 C_1 l^2}{Z \sqrt{2090 \cdot 4,653}} = 0,03 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \overset{x_1}{0,5271} C_2 + \overset{x_2}{0,4733} C_1 l^2 = 5,4005 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \overset{x_1}{0,9624} C_2 + \overset{x_2}{0,0376} C_1 l^2 = 5,9169 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5271 & 0,4733 \\ 0,9624 & 0,0376 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 l^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5,4005 \\ 5,9169 \end{pmatrix}}_{[B]}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 l^2 \end{pmatrix} = [A]^{-1} \cdot [B] = \begin{pmatrix} 5,962 \\ 4,771 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} C_2 = 5,962 \\ C_1 = 1,193 \end{matrix}}$$



b) Si la estructura se le quitan los momentos en los extremos ( $C_1 = C_2 = 0$ ) y se le aplica un  $p(t) = 30 \text{ t/m}$  determinando el momento máximo en la base:

La respuesta máxima model es en FDEI y son  $Z_{max} = \frac{p_{om}}{K_n} \sum_{k=1}^D$

$$F(x) = [\Phi]^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,726 & -0,688 \\ 0,981 & 0,194 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4,30 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -82,56 \\ 23,28 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |Z_{max}| = \begin{pmatrix} 0,6909 \\ 0,0223 \end{pmatrix}$$

La respuesta de la estructura en FDEI en parte lateral

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \phi_1 \cdot Z_{max1} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \phi_2 \cdot Z_{max2} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

para determinar el máximo momento model.

$$M_{max1} = Z_{max1} \cdot \phi_{11} \cdot \frac{6EI}{l^2} + Z_{max1} \cdot \phi_{12} \cdot \frac{4EI}{l}$$

$$M_{max1} = Z_{max1} \cdot \left( \phi_{11} \cdot \frac{6EI}{l^2} + \phi_{12} \cdot \frac{4EI}{l} \right) = 0,6909 \cdot \left( 0,726 \cdot \frac{6 \cdot 1000}{4} - 0,688 \cdot \frac{7000}{2} \right)$$

$$M_{max1} = 277,05$$



$$M_{\max, z} = 0,6223 \cdot \left( 0,981 \cdot \frac{6000}{4} + \frac{0,194 \cdot 2000}{2} \right)$$

$$M_{\max, z} = 37,14$$

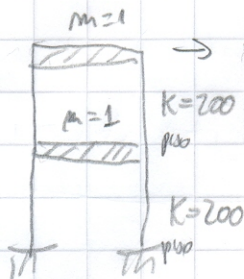
$$\Rightarrow M(\psi) = 277,05 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + 37,14 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Luego el mayor momento ocurrirá cuando coincidan los máximos, los cuales coinciden en algún momento ya que  $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\Rightarrow \underline{M_{\max} = 277,05 + 37,14 = 314,19}$$

P2

$$p = 5\%$$



$$p(t) = 50 \cdot \sin(11 \cdot t)$$

Determine el desplazamiento máximo de piso.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 400 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \begin{pmatrix} 76,4 \\ 523,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 8,74 \\ 22,80 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0,719 \\ 0,275 \end{pmatrix}$$

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$FAD = \begin{pmatrix} 1,674 \\ 1,298 \end{pmatrix}$$

$$Z(t) = \frac{p_{om}}{K_m} \cdot D_m \cdot \sin(\omega_m \cdot t + \phi)$$

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} 1 & -0,618 \\ 0,618 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_m = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} 105,572 & 0 \\ 0 & 723,607 \end{bmatrix}$$

$$F_m(t) = [\Phi]^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,618 \end{pmatrix} \cdot p(t) \quad (p(t) = 50 \sin(11 \cdot t))$$

$$F_m(t) = \begin{pmatrix} 50 \\ -30,9 \end{pmatrix} \sin(11 \cdot t) \Rightarrow \frac{p_{om}}{K_m} \cdot D_m = \begin{pmatrix} 0,793 \\ -0,055 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Es negativo una vez

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,618 \end{pmatrix} 0,793 \cdot \sin(11t - \phi_1) + \begin{pmatrix} 0,618 \\ -1 \end{pmatrix} 0,055 \sin(11t - \phi_2)$$



Definición  $\tilde{\phi}_1$  y  $\tilde{\phi}_2$

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{z \beta \gamma}{1 - \gamma^2}\right) = \begin{pmatrix} -0,212 \\ 0,062 \end{pmatrix} \text{ rad}$$

$$\gamma = \frac{\bar{w}}{w} = \begin{pmatrix} 1,259 \\ 0,481 \end{pmatrix}$$

$$r(t) = A_1 \cos(11t + \tilde{\phi}_1) + A_2 \cos(11t + \tilde{\phi}_2)$$

$$r(t) = A_1 [\cos(11t) \cos(\tilde{\phi}_1) - \sin(\tilde{\phi}_1) \sin(11t)]$$

$$+ A_2 [\cos(11t) \cos(\tilde{\phi}_2) - \sin(\tilde{\phi}_2) \sin(11t)]$$

$$r(t) = \underbrace{[A_1 \cos(\tilde{\phi}_1) + A_2 \cos(\tilde{\phi}_2)]}_{A_3} \cos(11t)$$

$$\underbrace{[-A_1 \sin(\tilde{\phi}_1) - A_2 \sin(\tilde{\phi}_2)]}_{A_4} \sin(11t)$$

$$r(t) = A_3 \cos(11t) + A_4 \sin(11t) = \sqrt{A_3^2 + A_4^2} \cdot \cos(11t + \tilde{\phi}_3)$$

$$\Rightarrow \max(r(t)) = \sqrt{A_3^2 + A_4^2}$$

evaluando para el primer pío.

$$A_1 = 0,793 \quad A_2 = 0,034 \Rightarrow A_3 = 0,809 \quad |A_4| = 0,165$$

$$\Rightarrow \underline{r_{1 \text{ máx}} = 0,826}$$

evaluando para el segundo piso

$$A_1 = 0,490 \quad A_2 = -0,055 \Rightarrow A_3 = 0,424 \quad A_4 = +0,106$$

$$\Rightarrow \pi_{max}^{piso 2} = 0,437$$

- desplazamiento relativo piso superior

$$A_1 = (1 - 0,618) \cdot 0,793 = 0,303$$

$$A_2 = (0,618 - 1) \cdot 0,055 = 0,0899$$

$$\Rightarrow A_3 = 0,385$$

$$\Rightarrow A_4 = 0,658$$

$$\Rightarrow \pi_{desplazo sup. maximo} = 0,389$$

Resumen

$$\pi_{max}^{piso} = \begin{pmatrix} 0,826 \\ 0,437 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{max}^{desplazo} = \begin{pmatrix} 0,389 \\ 0,437 \end{pmatrix}$$