

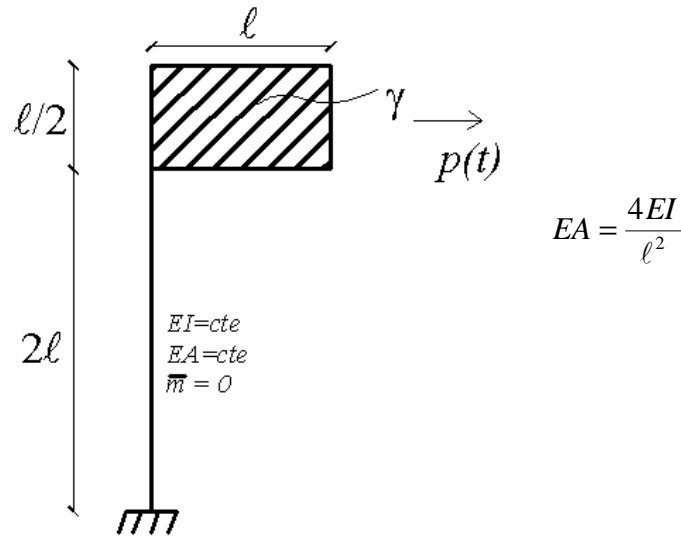
Ejercicio 6

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 6 de Octubre de 2006

P1. Determine la matriz de masa y rigidez para la estructura que se muestra en la figura. Luego determine una forma modal ϕ que cumpla con las condiciones de empotramiento y condiciones de borde con la masa. Luego calcule el período asociada a esa forma de vibrar usando el método de coordenadas generalizadas.



P2. Para la estructura que se muestra en la figura determine la matriz de masa, rigidez y amortiguamiento, luego use una forma modal consistente ϕ y con ella, calcule el período (T) y la razón de amortiguamiento (β) asociada a esa forma de vibrar usando coordenadas generalizadas.

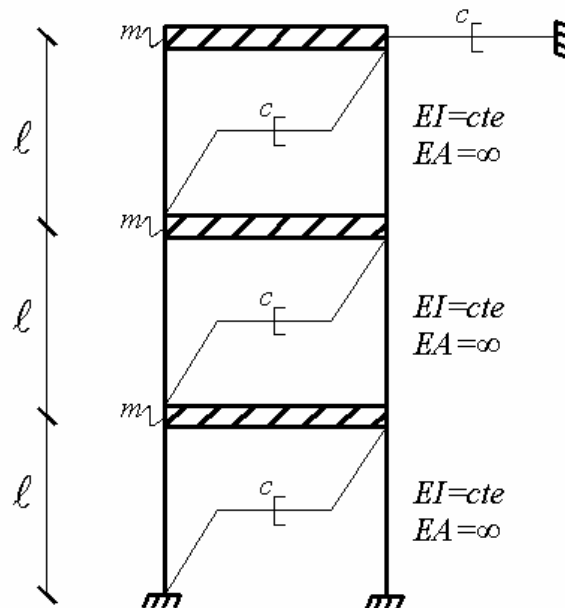
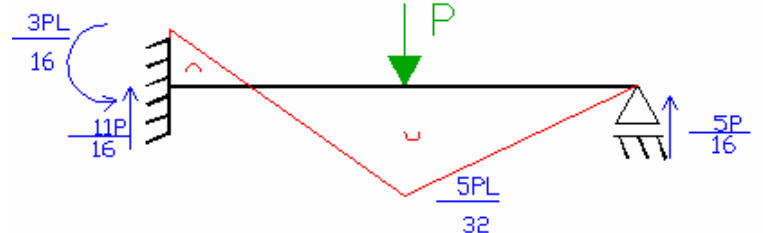
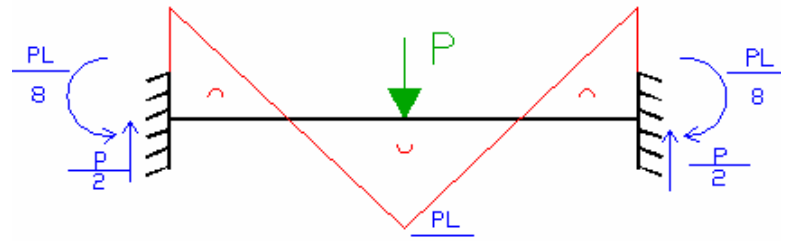
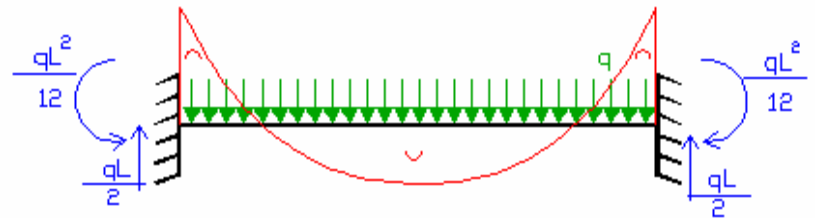
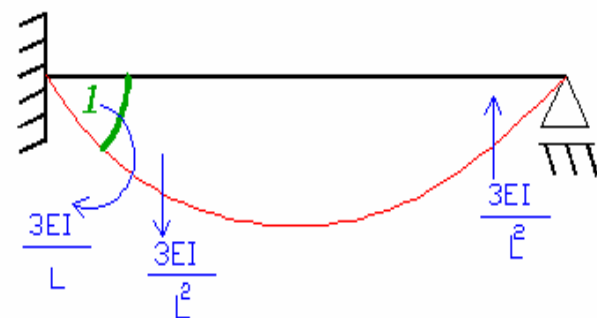
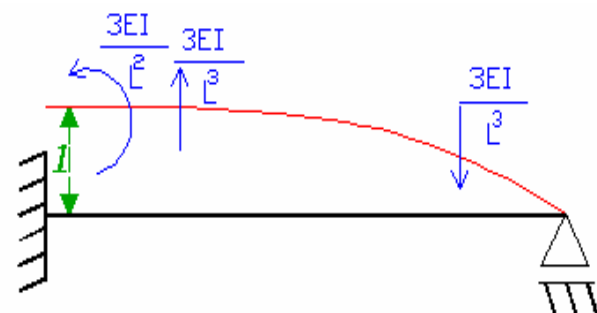
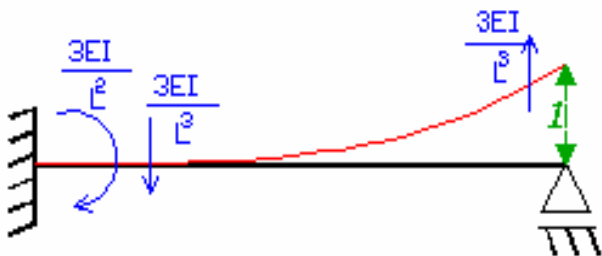
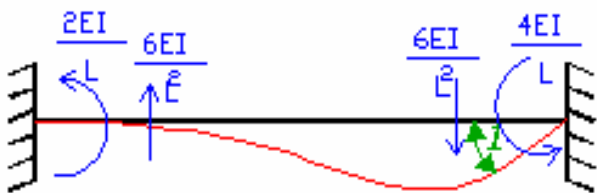
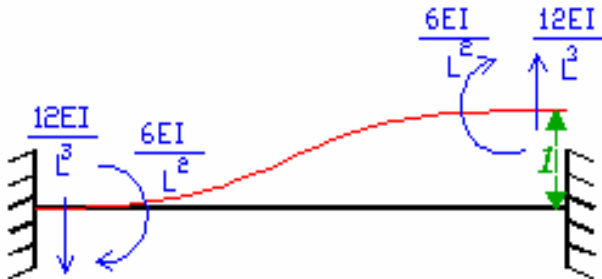


Tabla Básica de Rigidez
CI42G Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

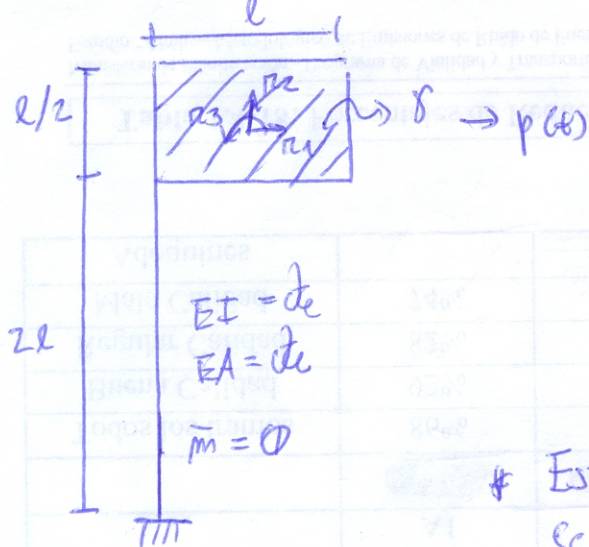


Tipo de Simetría						
	Plana		Axial		Puntual	
	S	A	S	A	S	A
N_x	?	0	?	0	?	0
N_y	0	?	0	?	?	0
N_z	0	?	?	0	?	0
M_x	0	?	?	0	0	?
M_y	?	0	0	?	0	?
M_z	?	0	?	0	0	?

PAUTA Ejercicio 6 CI426

1/6

P1



$$EA = \frac{4EI}{l^2}$$

* ESTRUCTURA DE 3 GDL DINÁMICAS.

Se refieren las GDL en el centro de masa de modo de obtener una matriz de masa diagonal

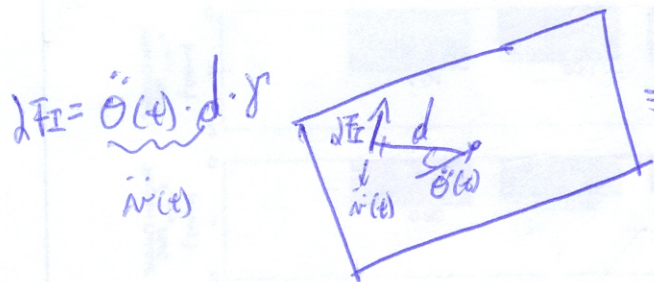
• MATRIZ DE MASA

$$m_1 = \gamma \cdot A = \frac{\gamma \cdot l^2}{2}$$

$$m_2 = \gamma \cdot A = \frac{\gamma l^2}{2} \quad I_3 = \gamma \cdot A \cdot \frac{(l^2 + (l/2)^2)}{12}$$

$$I_3 = \frac{\gamma l^2}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{4} l^2 = \frac{5}{96} \gamma l^4$$

NOTA Si se genera una aceleración unitaria en GDL 3.



$$M_F = \int d \cdot dF_F dA$$

$$M_F = \int \ddot{\theta}(t) \gamma d^2 dA = \ddot{\theta}(t) \int \gamma d^2 dA = \ddot{\theta}(t) I_3$$

$$I_3 = \int_A \gamma d^2 dA = 4 \int_0^{l/2} \int_0^{l/4} \gamma (\sqrt{x^2 + y^2})^2 dy dx$$

$$I_3 = 4 \gamma \left[\int_0^{l/2} \left(\int_0^{l/4} x^2 dy \right) dx + \int_0^{l/2} \int_0^{l/4} y^2 dy dx \right] \cdot \gamma$$

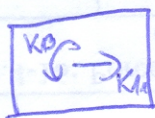
$$I_3 = 4 \gamma \left[\int_0^{l/2} x^2 \cdot \frac{l}{4} dx + \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{4} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} dx \right] = 4 \gamma \left[\left(\frac{l}{2} \right)^3 \cdot \frac{l}{12} + \left(\frac{l}{4} \right)^3 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{96} \gamma l^4$$

Luego la MATRIZ DE MSA:

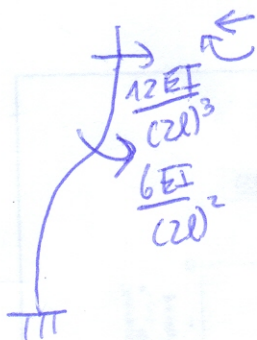
$$[M] = \begin{bmatrix} 8l^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 8l^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{96} 8l^4 \end{bmatrix}$$

• MATRIZ DE RIGIDEZ:

$$r_1 = 1, r_2 = r_3 = 0$$



$$\Rightarrow K_{11} = \frac{12EI}{(2l)^3} = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3}$$



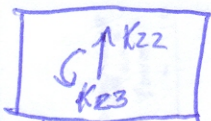
$$K_{13} = \frac{6EI}{(2l)^2} + \frac{3}{2} \frac{EI}{(2l)^3} \times \frac{l}{4} = \frac{6EI}{4l^2} + \frac{3}{8} \frac{EI}{l^2}$$

$$K_{13} = \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2}$$

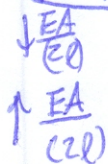
$$K_{12} = 0$$

$$\bullet r_2 = 1, r_1 = r_3 = 0$$

$$EA = \frac{4EI}{l^2}$$


 \Rightarrow

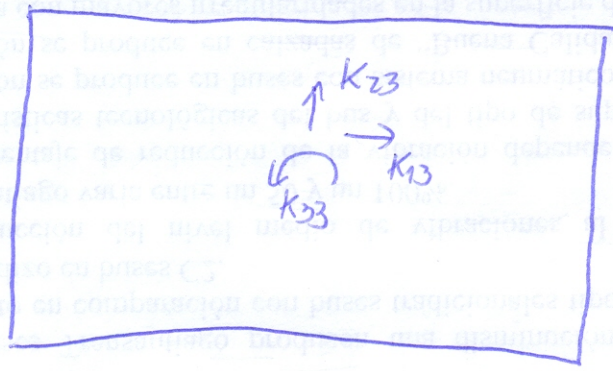
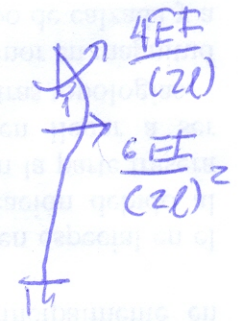
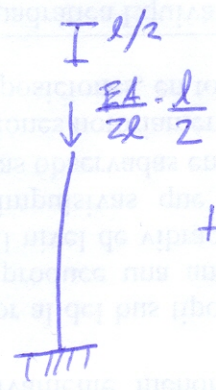
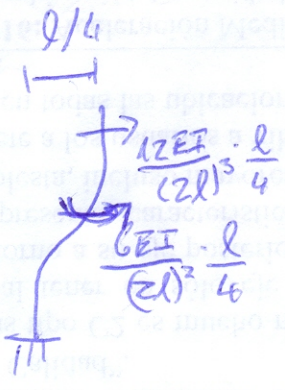
$$K_{22} = \frac{EA}{2l} = \frac{4EI}{2l^3} = \frac{2EI}{l^3}$$



$$K_{23} = -\frac{EA}{(2l)} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{EI}{l^2}$$

$$K_{21} = 0$$

$R_3 = 1, R_1 = R_2 = 0$



$\frac{12EI}{32l^2} = \frac{3}{8} \frac{EI}{l^2}$

$\Rightarrow K_{23} = -\frac{EI}{l^2}$

$\frac{6}{4} \frac{EI}{l^2} = \frac{3}{2} \frac{EI}{l^2}$

$K_{13} = \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} \right) \frac{EI}{l^2} = \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2}$

$\frac{3}{8} \frac{EI}{l}$

$\frac{2EI}{l}$

$\frac{EA}{4} = \frac{EI}{l^2}$

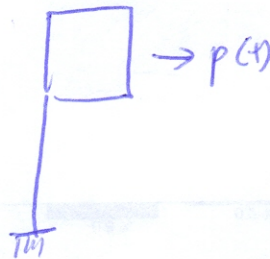
$K_{33} = \left(\frac{3}{8} + 2 \right) \frac{EI}{l} + \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{l}{2}$

$K_{33} = \left(\frac{3}{8} + 2 + \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \right) \frac{EI}{l}$

$K_{33} = \left(\frac{12 + 64 + 15 + 16}{32} \right) \frac{EI}{l} = \frac{107}{32} \frac{EI}{l}$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3} & 0 & \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2} \\ 0 & \frac{2EI}{l^3} & -\frac{EI}{l^2} \\ \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2} & -\frac{EI}{l^2} & \frac{107}{32} \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

• En caso que tengamos una carga horizontal



Se puede considerar que la respuesta es proporcional al caso estático

La respuesta es caso estático.

$$[K] \{n\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p(t) \Rightarrow \{n\}_{est} = [K]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \{n\} \text{ según Formulario} \\ n(x,t) = n(x) \cdot z(t) \end{matrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 3,79 & p(t) \cdot l^3/EI \\ -1,25 & p(t) \cdot l^3/EI \\ -2,5 & p(t) \cdot l^3/EI \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad n(x) = \begin{pmatrix} 3,79 l^3 \\ -1,25 l^3 \\ -2,5 l^2 \end{pmatrix} = \phi(x)$$

por otra parte $N = \phi(x) \cdot z(t)$ Suponiendo $z(t) = z_0 \sin(\omega t)$ homogénea

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GDL}} m_i \dot{N}^2 =$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = z_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow z(t)_{max} = z_0 \quad \text{y} \quad \dot{z}(t)_{max} = z_0 \omega$$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{GDL}} m_{GDL} \cdot (z_0 \omega)^2 \cdot \phi(x)^2$$

$$E_{K_{max}} = \frac{1}{2} \sum P \cdot \Delta = \frac{1}{2} \sum K \cdot \Delta^2 = \frac{1}{2} \sum K (z_0)^2 \cdot \phi(x)^2$$

Expresado inicialmente

5/6

$$E_{kmax} = \frac{1}{2} (z_0)^2 \phi(x)^T \underbrace{[K]}_{P/z_0} \phi(x)$$

$$E_{cmax} = \frac{1}{2} \omega^2 z_0^2 \phi(x)^T [M] \phi(x)$$

IGUALANDO LA ENERGÍA POTENCIAL MÁXIMA Y LA CINÉTICA (CASO HOMOGÉNEO SIN AMORTIGUAMIENTO).

$$E_{kmax} = E_{cmax}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \phi(x)^T [M] \phi(x) = \phi(x)^T [K] \phi(x)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\phi(x)^T [K] \phi(x)}{\phi(x)^T [M] \phi(x)} = \frac{K^*}{m^*}$$

$$\Rightarrow K^* = (3,79 l^3 - 1,25 l^3 - 2,5 l^2) \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{EI}{l^3} & 0 & \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2} \\ 0 & \frac{2EI}{l^3} & -\frac{EI}{l^2} \\ \frac{15}{8} \frac{EI}{l^2} & -\frac{EI}{l^2} & \frac{107}{32} \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3,79 l^3 \\ -1,25 l^3 \\ -2,5 l^2 \end{pmatrix}$$

$$K^* = 3,7916 EI l^3$$

$$M^* = (3,79 l^3 - 1,25 l^3 - 2,5 l^2) \begin{bmatrix} 8 l^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 l^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{96} l^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3,79 l^3 \\ -1,25 l^3 \\ -2,5 l^2 \end{pmatrix}$$

$$M^* = 8,295 l^8$$

$$W = \sqrt{\frac{Kf}{m^3}} = \sqrt{\frac{3,7916 \bar{E} I l^3}{8,2958 l^8}} = 9,676 \sqrt{\frac{EI}{8 l^5}} \frac{rad}{seg.}$$

$$f = \frac{W}{2\pi} = 0,1076 \sqrt{\frac{EI}{8 l^5}} [Hz]$$

$$T = \frac{1}{f} = 9,293 \sqrt{\frac{8 l^5}{EI}} [seg.]$$

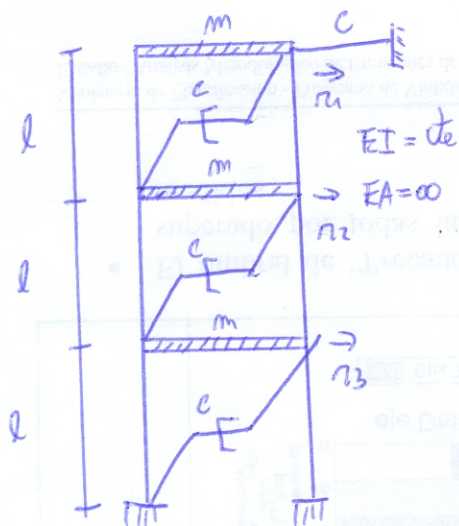
Minimo	0'4 (V3)	1'3 (V3)	2'0 (V3)	Clasificación
Maximo	13'2 (C3)	13'3 (M)	12'2 (C3)	
M	0'0	13'3	10'3	Clasificación 8'2 < ADA < 12
C3	13'2	13'3	12'2	
B3	8'8	11'0	8'3	
V3	0'4	1'3	1'0	
VI	0'3	0'3	1'0	Indefinida ADA > 8'2
Tecnología	Control de Desplazamiento ADA ³⁰ en el eje	de Traslado ADA ³⁰ en el eje	de Voladizo ADA ³⁰ en el eje	

Medidas para cada clasificación en cada Tecnología. Unidades: mm/seg.
Tabla 14-13: Dosis de Vibración equivalente de Exposición de 30 minutos (ADA³⁰)

Minimo	0'4 (V3)	1'3 (V3)	2'0 (V3)	Clasificación
Maximo	13'2 (C3)	13'3 (M)	33'3 (C3)	
M	0'0	13'3	13'4	Clasificación 8'2 < ADA < 12
C3	13'2	13'3	33'3	
B3	8'8	11'0	0'2	
V3	0'4	1'3	0'0	
VI	0'3	0'3	13'3	Indefinida ADA > 8'2
Tecnología	Control de Desplazamiento o max ADA ³⁰	de Traslado max ADA ³⁰	de Voladizo max ADA ³⁰	

Medidas para cada clasificación en cada Tecnología. Unidades: mm/seg.
Tabla 14-13: Dosis de Vibración de Exposición de 30 minutos (ADA³⁰) Máximas

valores ADA a un referente de 30 minutos.
medidas de cantidades de superficie. En este caso se consideró todo el recorrido y se calculó el
minutos que se midió por cada tecnología en cada clasificación, pero considerando una
En la Tabla 14-13 se resumen la Dosis de Vibración equivalente a una exposición de 30
medidas se relacionan a las condiciones más extremas a las que se sometieron los puentes
en que fundamentalmente se sometieron superficies de estos edificios. Los valores máximos
y condiciones de construcción. Este valor máximo se empleará posteriormente en estimaciones
representar la exposición en un recorrido libre donde existen distintas cantidades de superficie
cada tecnología de puentes. Los 30 minutos se consideran esencialmente y por tanto
minutos medidas en cada clasificación (de desplazamiento o control de traslación y voladizo) y para
En la Tabla 14-15 se resumen las máximas Dosis de Vibración de exposiciones de 30



ESTRUCTURA DE 36DL DINÁMICO.

RIGIDEZ DE PISO $K = \frac{24EI}{l^3}$

Se completa una forma modal consistente a proxima $\phi(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• MATRIZ DE MASA, RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{24EI}{l^3} \quad [C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} c$$

• m^* , K^* , C^* , (Cálculo de Δ y $\dot{\Delta}$ de desplazamientos relativos de piso y desplazamientos totales).

$$K^* = (3-2)^2 \cdot K + (2-1)^2 \cdot K + (1-0)^2 \cdot K = 3K \quad (\text{Asociado a desplazamientos relativos})$$

$$m^* = (3)^2 \cdot m + (2)^2 \cdot m + (1)^2 \cdot m = 13m \quad (\text{Asociado a aceleraciones absolutas})$$

$$C^* = (3-2)^2 \cdot c + (2-1)^2 \cdot c + (1-0)^2 \cdot c + 3^2 \cdot c = 17c$$

Asociados a
velocidades relativas

Asociado a
velocidades
absoluta

• OTRA FORMA ALTERNATIVA es igualando la energía cinética y potencial máxima.

$$\Delta(x,t) = \phi(x) z_0 \sin(\omega t) \quad \bar{E}_{\text{max}} = \sum \frac{1}{2} m \dot{\Delta}^2 = \sum \frac{1}{2} m \phi(x)^2 \cdot \omega^2 z_0^2 \quad \omega^2 = \frac{K^*}{m^*} \text{ con } K^* = [\phi(x)]^T [K] [\phi(x)]$$

$$\dot{\Delta}(x,t) = \phi(x) \cdot \omega z_0 \cos(\omega t) \quad \bar{E}_{\text{max}} = \sum \frac{1}{2} K \Delta^2 = \sum \frac{1}{2} K \phi(x)^2 z_0^2 \quad \Rightarrow \quad m^* = [\phi(x)]^T [M] [\phi(x)]$$

Resolvienno

$$K^* = [R]^T [K] [R] = [3 \ 2 \ 1] \cdot K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K^* = K [3 \ 2 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3K$$

$$m^* = [R]^T [M] [R] = m [3 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m^* = m [3 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = m (3^2 + 2^2 + 1^2) = 13m$$

$$C^* = [R]^T [C] [R] = [3 \ 2 \ 1] C \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^* = C [3 \ 2 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 12C$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{K^*}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{13m}{3K}}$$

$$p = \frac{C^*}{2\sqrt{m^* K^*}} = \frac{12C}{2 \cdot \sqrt{39mK}} = \frac{6C}{\sqrt{39mK}}$$