

Ejercicio 5

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

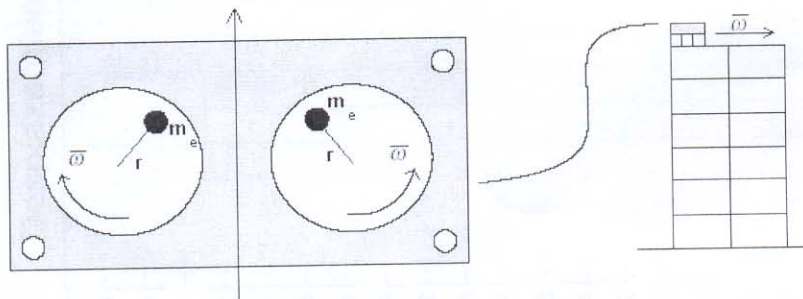
Viernes 1 de Septiembre de 2006

P1. Se realizó un ensayo del tipo Pull-Back (con desplazamiento y velocidad inicial) a un oscilador de un grado de libertad, se midieron los tiempos, y las amplitudes máximas y mínimas, que se muestran en la tabla.

- (i) Determine el período y la razón de amortiguamiento. (T y β).
- (ii) La disipación es Visco-elástica (¿Por qué?, ¿Siempre?)
- (iii) Determine la velocidad y desplazamiento inicial que se dio al sistema de un grado de libertad.

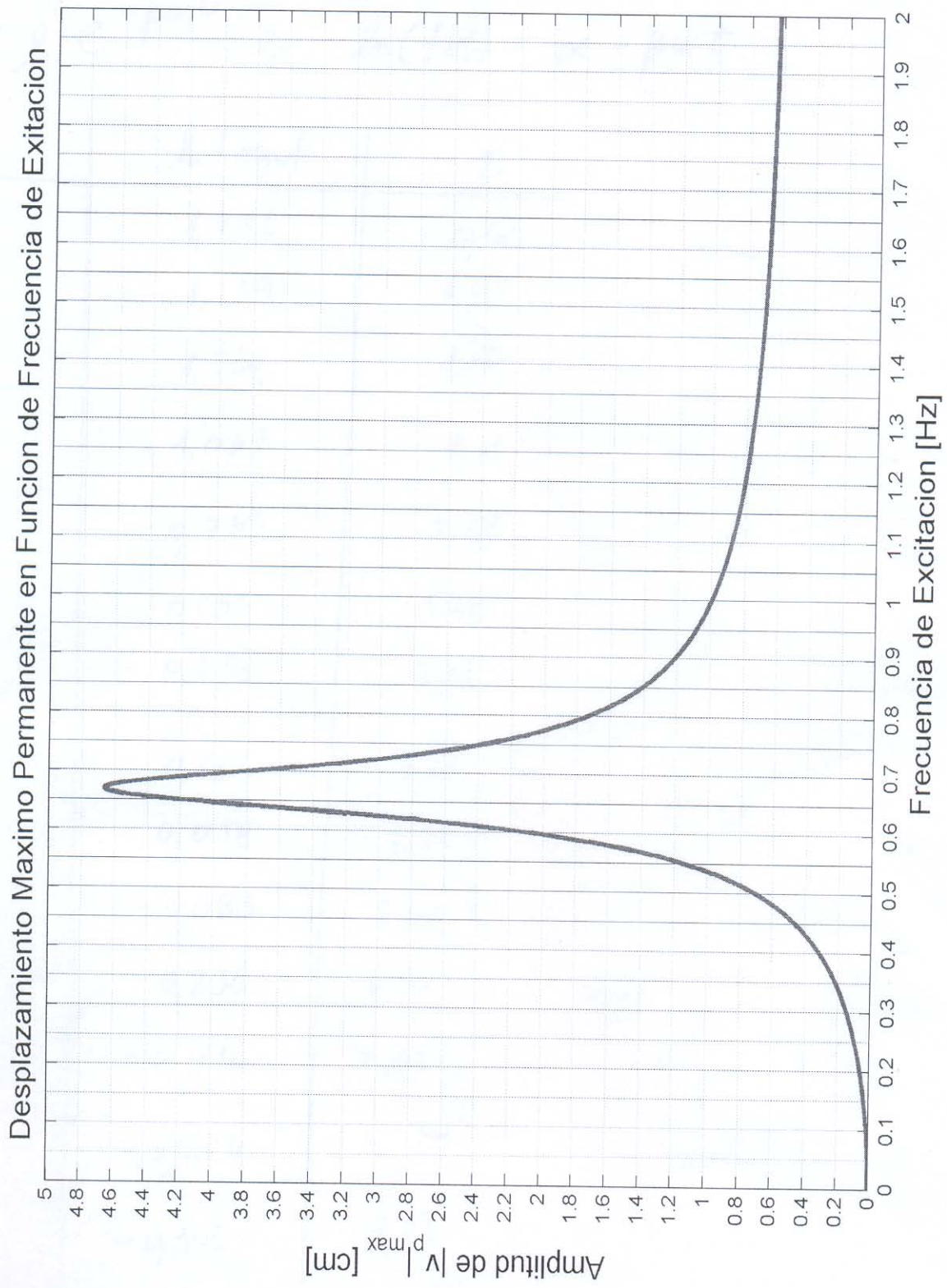
Amplitud (cm)	tiempo (seg)	Amplitud (cm)	tiempo (seg)
6.00	0.40	-1.18	4.61
-4.66	1.00	1.06	5.22
3.62	1.60	-0.92	5.82
-2.82	2.21	0.79	6.42
2.19	2.81	-0.66	7.02
-1.70	3.41	0.52	7.62
1.32	4.01	-0.39	8.23

P2. A una estructura de un grado de libertad se le impone una vibración forzada con una máquina de masas excéntricas. El valor del desplazamiento máximo en régimen permanente es graficado en función de la frecuencia de excitación (f). Determine el desplazamiento máximo **considerando régimen transiente y permanente** que se puede obtener con la maquinaria de masa excéntrica cuando la frecuencia de excitación coincide con la de la estructura. Además determine la masa, rigidez y razón de amortiguamiento de la estructura (m, k, β).



$$m_e = 10 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

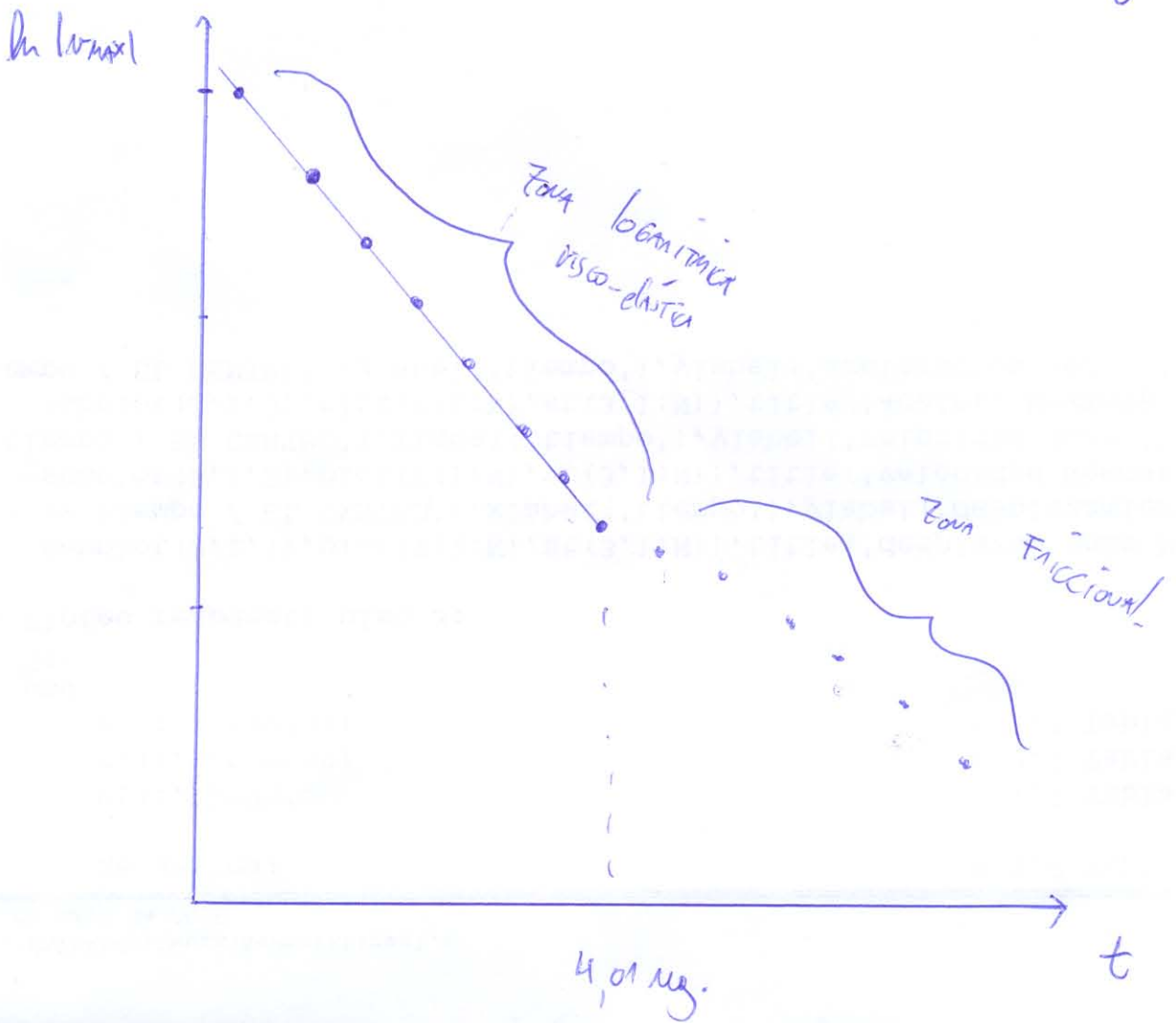
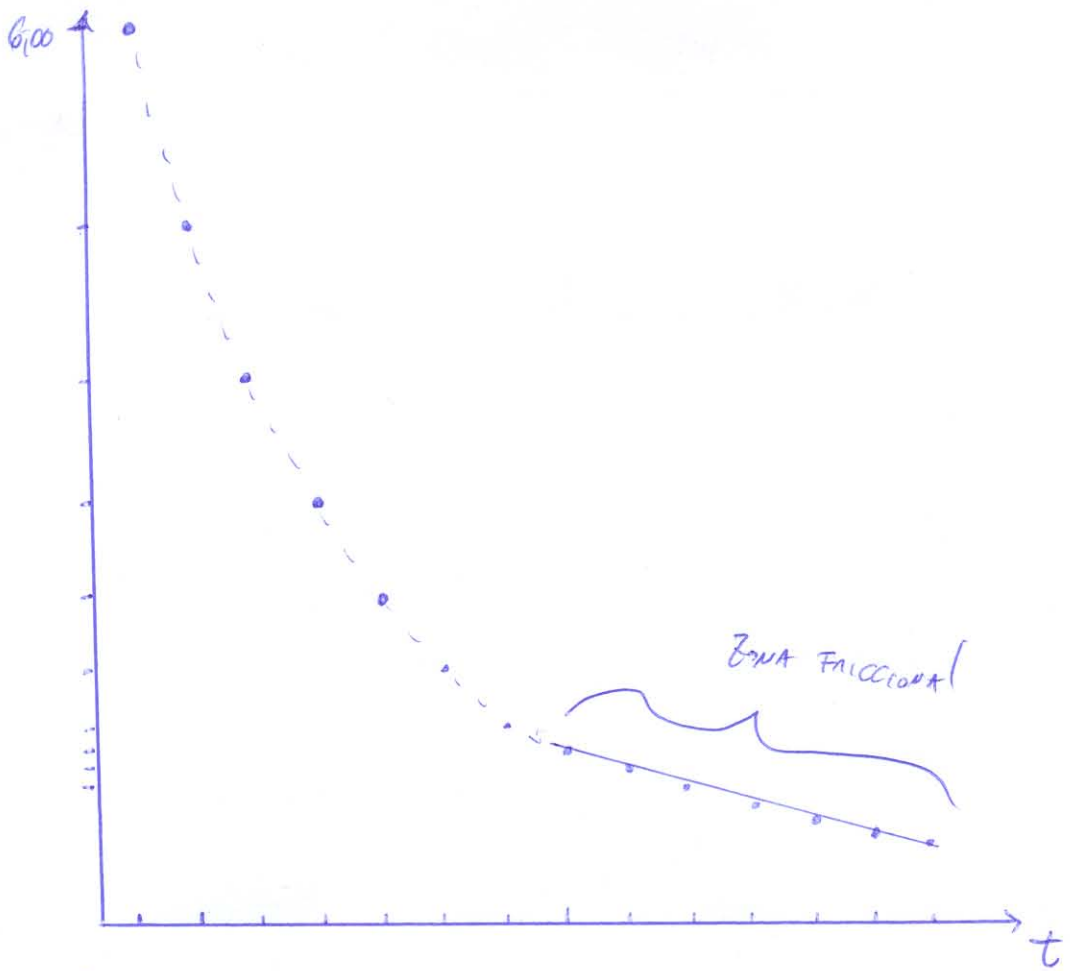




$$\frac{T_D}{2} = \frac{0,23 - 0,4}{13} = 0,602 \text{ ng} \Rightarrow T_0 = 1,205 \text{ ng}.$$

$$|N| = p \cdot e^{-\beta \omega t} \Rightarrow \ln(|N|) = \alpha - \beta \omega t.$$

$ N_{\max} $	$\ln N_{\max} $	t
6,00	1,791	0,40
4,66	1,539	1,00
3,62	1,286	1,60
2,82	1,037	2,21
2,19	0,784	2,81
1,70	0,531	3,41
1,32	0,278	4,01
1,18	0,166	4,61
1,06	0,058	5,22
0,92	-0,083	5,82
0,79	-0,236	6,42
0,66	-0,416	7,02
0,52	-0,654	7,62
0,39	-0,942	8,23



Se realiza una regresión logarítmica en zona viscoelástica.

$$\ln(I_{\text{max}}) = 1,9583 - 0,4186 t$$

$$R^2 = 0,999 \dots$$

Luego;

$$0,4186 = \beta \omega$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\beta^2}} = 1,205$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{0,4186}{\beta}$$

\leadsto

$$\frac{2\pi}{\frac{0,4186}{\beta} \sqrt{1-\beta^2}} = 1,205 \Rightarrow \underline{\beta = 0,08}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{0,4186}{0,08} = 5,2325 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,200 \text{ seg}$$

ii) La disipación es visco-elástica hasta los 4 seg, luego se vuelve mas friccional. Esto es porque para ω de crecimiento logarítmico a uno lineal.

$$\text{iii). } r(t) = g e^{-\beta \omega t} \cos(\omega_d t - \theta) \quad \omega_d = \omega \cdot \sqrt{1-\beta^2} = 5,2166 \text{ rad/seg.}$$

Luego $\theta = \frac{\omega_d \cdot 0,4 \text{ seg}}{\text{piña máxima}} = 2,086 \text{ rad}$; $g \cdot e^{-\beta \omega \cdot 0,4 \text{ seg}} = 6 \text{ cm} \Rightarrow \underline{g = 7,093 \text{ cm.}}$

$$r(0) = r_0 = g \cdot \cos(-\theta) = -3,495 \text{ cm}$$

$$\dot{r}(t) = -\beta \omega g e^{-\beta \omega t} \cos(\omega_d t - \theta) - g e^{-\beta \omega t} \omega_d \sin(\omega_d t - \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{r}_0 = -\beta \omega g \cdot \cos(-\theta) - g \omega_d \sin(-\theta) = 33,66 \text{ cm/seg.}$$

$$p(t) = Z \cdot m_e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot r \cdot \sin(\bar{\omega} t).$$

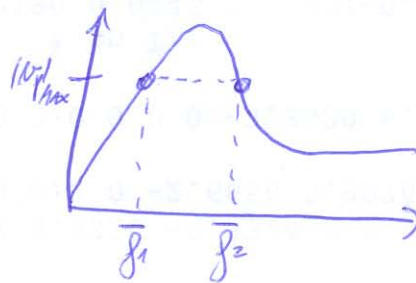
$$r(t) = \underbrace{\frac{Z m_e r \bar{\omega}^2}{k}}_{|r_p|_{\max}} \sin(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}; \quad r = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\Rightarrow |r_p|_{\max} = \frac{Z \cdot m_e r \cdot (2\pi \cdot \bar{f})^2}{k \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \beta \cdot \left(\frac{\bar{f}}{f}\right)\right)^2}}$$

del máximo del gráfico $f \approx 0,66 \Rightarrow T = 1,5$.

Con el criterio de ancho de banda obtenemos la razón de AMORTIGUAMIENTO. $|r_p|_{\max 1} = |r_p|_{\max 2}$



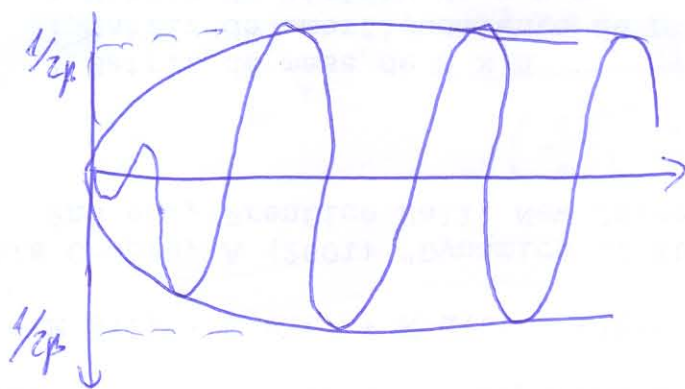
$$\Rightarrow \frac{|r_p|_{\max} \cdot k}{Z m_e r (2\pi)^2} = \frac{\bar{f}_1^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{f}_1}{f}\right)^2\right)^2 + \left(2\beta \left(\frac{\bar{f}_1}{f}\right)\right)^2}} = \frac{\bar{f}_2^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{f}_2}{f}\right)^2\right)^2 + \left(2\beta \left(\frac{\bar{f}_2}{f}\right)\right)^2}}$$

En β máximos en diversos $|N_p|_{\max}$.

$ N_p _{\max}$	f_1	f_2	β
4,2	0,650	0,690	0,060
4,0	0,645	0,685	0,054
3,6	0,640	0,705	0,072
3,0	0,625	0,720	0,035
2,0	0,595	0,775	0,034
1,0	0,590	1,000	0,086
0,8	0,515	1,200	0,063

β es muy sensible a f_1 y f_2 , pero de estos no tenemos mucha precisión. Así que tomamos el promedio. $\beta \approx 0,06$

La respuesta en régimen transiente ~~es~~ permanentemente en resonancia:



El máximo valor en resonancia se produce en régimen permanente

\Rightarrow $|N_{\max}| = 4,62 \text{ cm}$ (del gráfico).

- Para obtener m y K basta con evaluar en algún punto del gráfico.

$$|x_{\text{plax}}|_{\text{res}} = 4,62 \text{ cm} = \frac{Z m e r \bar{\omega}^2 D}{K}$$

$$D \approx \frac{1}{Z f}$$

$$\Rightarrow K = \frac{Z \cdot m e \cdot r \bar{\omega}^2 \cdot D}{4,62 \text{ cm}}$$

$$K = \frac{2 \cdot 10 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot 1 \text{ m} \cdot \left(\frac{2\pi}{1,5}\right)^2 \cdot \frac{1}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,06}}{4,62 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow K = 632,97 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} = 63297 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{63297 \text{ Kg/m}}{\left(\frac{2\pi}{1,5}\right)^2 \frac{1}{\text{s}^2}} = 3607,5 \frac{\text{Kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

Adicional: Caso em Ressonância.

$$N_p = 4,62 \text{ cm} (\bar{\omega} t - \theta).$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\beta r}{1-r^2}\right), \quad r=1 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{N_p = 4,62 \text{ cm} \cdot \cos(\bar{\omega} t)}.$$

$$N(t) = N_p(t) + N_h(t) = e^{-\beta \omega t} \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) + 4,62 \cos(\bar{\omega} t)$$

impondo $N_0 = \dot{N}_0 = 0$

$$\Rightarrow N(t=0) = 0 = B + 4,62 \text{ cm} \Rightarrow B = -4,62 \text{ cm}$$

$$\dot{N}(t) = -\beta \omega e^{-\beta \omega t} \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) + e^{-\beta \omega t} \cdot$$

$$[A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t)] - 4,62 \bar{\omega} \sin(\bar{\omega} t)$$

$$\dot{N}(t=0) = 0 = -\beta \omega B + A \omega \Rightarrow A = \frac{\beta \omega \cdot B}{\omega} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \cdot B$$

$$\Rightarrow A = -0,277 \text{ cm}, \quad \omega = \frac{2\pi}{1,5} = 4,189 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \bar{\omega} = 4,181 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\Rightarrow N(t) = e^{-0,06 \cdot \frac{2\pi}{1,5} \cdot t} \cdot (-0,277 \sin(4,181 t) - 4,62 \cos(4,181 t))$$

$$+ 1,42 \cdot \cos(4,181 t).$$

\Rightarrow
clássico

