

REPASO DE MECANICA DE FLUIDOS

CI41A HIDRAULICA

Prof. Y. Niño, Sem. Primavera 2004

1 Generalidades

Por definición, *fluido* es un material que, al aplicársele un esfuerzo de corte, se deforma continuamente, es decir *escurre* o *fluye*.

En el caso de fluidos denominados *Newtonianos*, esta propiedad se expresa a través de una ley constitutiva, conocida como *ley de Newton-Navier*:

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

donde τ denota esfuerzo de corte, μ es la propiedad del fluido denominada *viscosidad dinámica* y $d\gamma/dt$ es la tasa de deformación angular del fluido, la que se relaciona con los gradientes de velocidad del flujo. Por ejemplo, para la situación indicada en la Fig. 1, donde existe fluido entre placas planas paralelas, tal que la placa superior se mueve con una velocidad V debido a la aplicación de un esfuerzo de corte τ , mientras la placa inferior se mantiene fija, se tiene:

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{dv}{dy}$$

donde y denota la coordenada normal a las placas y $v(y)$ denota la distribución de velocidad longitudinal entre placas. Por equilibrio de fuerzas y utilizando la propiedad de *no resbalamiento*, que indica que las partículas de un fluido en contacto con una superficie sólida adquieren la velocidad de dicha superficie, es fácil demostrar:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{V}{e}$$

donde e es el espesor entre placas.

Fluidos *noNewtonianos* no mantienen la linealidad entre esfuerzo de corte y tasa de deformación expresada por las ecuaciones anteriores. La curva entre esfuerzo de corte y tasa de deformación angular determina el *diagrama reológico* del fluido. En la Fig. 2 se muestran ejemplos de diagramas reológicos de distintos tipos de fluidos.

Se denomina *fluido ideal* a aquel cuyo coeficiente de viscosidad es nulo ($\mu = 0$). Este tipo de fluido no existe en la naturaleza, sin embargo en algunas aplicaciones es conveniente hacer la suposición de viscosidad nula, cuando esta variable no influye de manera importante en los fenómenos estudiados.

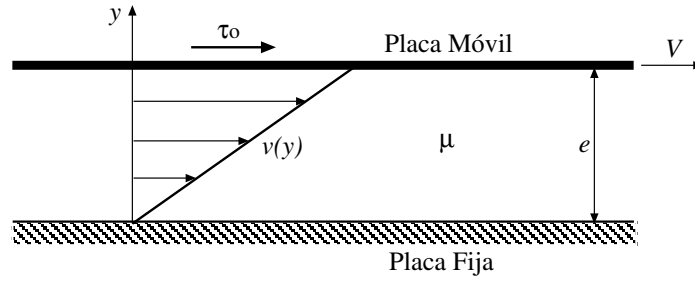


Figura 1: Flujo laminar de un fluido Newtoniano entre placas planas paralelas.

2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido Newtoniano incompresible son las *ecuaciones de Navier-Stokes*, que expresan básicamente la segunda ley de Newton aplicada sobre un volumen infinitesimal de fluido. En notación vectorial estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

donde D/Dt denota derivada material o total. Esta derivada se descompone en una derivada temporal o local, que da lugar a la aceleración local, y en una componente advectiva, que da lugar a la aceleración advectiva asociada a los cambios espaciales de velocidad. En (1), ρ y μ son propiedades del fluido y denotan densidad y viscosidad dinámica respectivamente, \vec{v} denota el vector velocidad y \hat{p} denota la *presión motriz* definida como:

$$\hat{p} = p + \rho g h \quad (2)$$

donde p es la presión termodinámica, g denota aceleración de gravedad y h es un eje vertical definido positivo hacia arriba, en contra de la dirección de la gravedad.

Los términos en (1) son todos lineales con excepción de la aceleración advectiva. El primer término del lado derecho representa el balance de fuerzas másicas de gravedad y fuerzas superficiales normales asociadas a la presión termodinámica. El último término del lado derecho representa el efecto de las fuerzas viscosas y es válido solo para el caso de fluido Newtoniano. Este último es un término que representa la difusión de cantidad de movimiento en el fluido debido a la acción molecular de la viscosidad.

En general, en flujos laminares la difusión viscosa domina sobre el término no-lineal asociado a la aceleración advectiva. Por el contrario, el flujo se hace turbulento cuando el término advectivo no-lineal es capaz de generar la inestabilidad generalizada del flujo en contra del efecto estabilizador de la viscosidad.

La ecuación (1) contiene 4 incógnitas, una por cada componente de la velocidad \vec{v} y una adicional correspondiente a la presión motriz \hat{p} . Para cerrar el número de ecuaciones requeridas para resolver un problema cualquiera de flujo, dado que (1) corresponde en realidad a 3 ecuaciones, una por cada componente del vector \vec{v} , es necesario considerar adicionalmente la *ecuación de continuidad* que se deriva del principio de conservación de la masa. Para un fluido incompresible, esta ecuación es:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

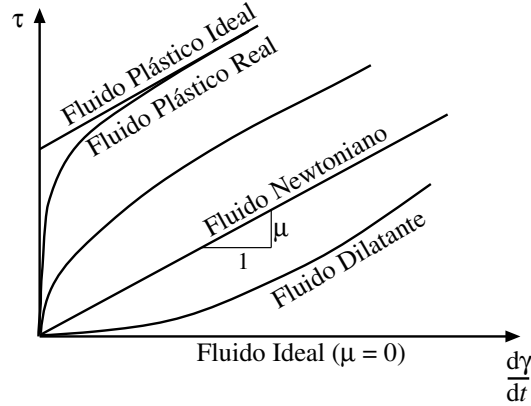


Figura 2: Diagrama reológico. Solo los fluidos Newtonianos verifican una relación lineal entre esfuerzo de corte, τ , y tasa de deformación angular, $d\gamma/dt$.

Se acostumbra, por conveniencia, utilizar notación tensorial para escribir las ecuaciones anteriores, de modo de visualizar mejor los distintos términos que las componen. En notación tensorial se consideran tres coordenadas: (x_1, x_2, x_3) , de modo que el vector velocidad tiene componentes: (u_1, u_2, u_3) . La componente de (1) en la dirección x_i puede escribirse como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ denota viscosidad cinemática.

En notación tensorial, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

En (4) y (5) el subíndice j repetido implica una sumatoria sobre $j = 1, 2, 3$.

3 Ecuación de Euler

Considerando la siguiente igualdad vectorial:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega}$$

donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ denota vector *vorticidad*, la ecuación de Navier-Stokes puede reescribirse como:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) \right\} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (6)$$

Para el caso de fluido ideal ($\mu = 0$), la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (7)$$

Para el caso de *flujo irrotacional* ($\vec{\omega} = 0$) de un fluido ideal o real, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla\hat{p} \quad (8)$$

ya que por identidades vectoriales es fácil probar que si $\vec{\omega} = 0$ entonces $\nabla^2\vec{v} = 0$. La Ec.(8) es conocida como *Ecuación de Euler*. De esta ecuación se deduce que en un flujo irrotacional los esfuerzos viscosos son nulos, aunque se considere el caso de fluido real. De este modo, la ecuación de Euler puede interpretarse también como la segunda ley de Newton aplicada a flujos en los cuales pueden despreciarse los efectos de la viscosidad.

Esta ecuación puede escribirse también como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \nabla\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h\right) = 0 \quad (9)$$

o bien, llamando:

$$B = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h$$

a la función *Bernoulli* o energía del flujo por unidad de peso, se tiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \nabla B = 0 \quad (10)$$

Para el caso de un flujo irrotacional permanente ($\partial/\partial t = 0$), la ecuación anterior se reduce a: $\nabla B = 0$, la que si es integrada en todo el espacio fluido indica que el Bernoulli se mantiene constante en todo dicho espacio. En otras palabras, la Ecuación de Euler permanente simplemente expresa la conservación de la energía del flujo.

En el caso de un fluido ideal en flujo rotacional permanente, es necesario considerar la Ec.(7). En este caso, por la existencia de vorticidad, el Bernoulli no es constante en todo el campo de flujo. Sin embargo, proyectando la ecuación a lo largo de una línea de corriente o una línea vorticiosa, es fácil demostrar que el Bernoulli se conserva, en cambio, a lo largo de cualquiera de esas líneas. Así, cuando los esfuerzos viscosos no intervienen en un flujo, su energía por unidad de peso se conserva.

4 Teorema General de la Energía

Hemos deducido que en casos que la viscosidad no controla el flujo (flujo irrotacional o fluido ideal) el Bernoulli o energía por unidad de peso del flujo se conserva, ya sea en todo el campo de flujo (caso de flujo irrotacional, fluido real o ideal) o bien a lo largo de las líneas de corriente y vorticiosas (caso de flujo rotacional, fluido ideal). Por otro lado, resulta evidente que en presencia de esfuerzos viscosos, que corresponden esencialmente a una fuerza de roce actuando en el fluido, parte de la energía mecánica del flujo se disipa en forma de calor debido a los efectos de fricción. En este caso el Bernoulli no se conserva en el campo de flujo, sino que disminuye a lo largo del escurrimiento por la disipación viscosa de esta energía. Para analizar este problema, que corresponde al caso típico de interés en ingeniería ya que los flujos de fluidos reales en conductos de cualquier tipo son siempre rotacionales, es necesario recurrir a la primera ley de la termodinámica.

Consideremos la energía total del flujo. Esta se compone de energía interna, potencial y cinética. Considerando energías específicas podemos escribir:

$$e = u + gh + \frac{v^2}{2}$$

donde e denota la energía específica total del flujo, u denota la energía específica interna y los dos últimos términos representan las energías específicas potencial y cinética, respectivamente.

La energía total contenida en un volumen de control \forall está dada por:

$$E = \int_{\forall} \rho e d\forall$$

La primera ley de la termodinámica aplicada a un sistema fluido se expresa como:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)E = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (11)$$

donde \hat{Q} denota el calor entregado externamente al sistema y W denota el trabajo mecánico realizado por el sistema sobre el medio externo.

Si consideramos un volumen de control de fluido, el *Teorema del Transporte de Reynolds* permite reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_S \rho e \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (12)$$

donde S representa la superficie del volumen de control y \hat{n} denota el vector unitario normal a S localmente.

Consideremos ahora un volumen de control formado por un tubo de flujo con secciones de entrada y salida S_1 y S_2 , respectivamente, como se muestra en la Fig. 3. Dado que no existe flujo a través de las paredes del tubo de flujo, la integral sobre S en la Ec.(12) se reduce a la suma de las integrales sobre S_1 y S_2 . Dado que el vector unitario normal en S_1 , \hat{n}_1 , tiene sentido opuesto al vector velocidad en dicha sección, \vec{v}_1 , lo cual no ocurre en S_2 , entonces es posible definir:

$$\vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 = -v_{n1}$$

$$\vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 = v_{n2}$$

Por continuidad se cumple:

$$\int_{S_1} \rho_1 v_{n1} dS_1 = \int_{S_2} \rho_2 v_{n2} dS_2 = G$$

donde G denota el gasto másico que circula por el tubo de flujo y ρ_1 y ρ_2 representan la densidad del fluido en las secciones de entrada y salida del tubo de flujo, respectivamente.

Con esta consideración, la aplicación de (12) al tubo de flujo da como resultado:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_{S_2} \rho_2 e_2 v_{n2} dS_2 - \int_{S_1} \rho_1 e_1 v_{n1} dS_1 = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (13)$$

Si se considera, por simplicidad, el caso de régimen permanente y velocidad uniforme en la sección de escurrimiento, es posible reescribir la ecuación anterior como:

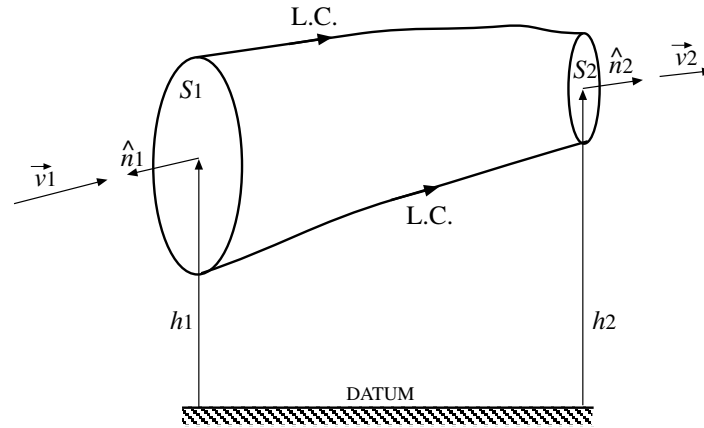


Figura 3: Volumen de control correspondiente a un tubo de flujo, cuyas paredes son líneas de corriente (L.C.). La entrada y salida de fluido hacia y desde el volumen de control se realiza solo a través de las superficies S_1 y S_2 , respectivamente.

$$G (e_2 - e_1) = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (14)$$

donde:

$$e_1 = u_1 + \frac{v_1^2}{2} + g h_1$$

$$e_2 = u_2 + \frac{v_2^2}{2} + g h_2$$

y u_1 y u_2 denotan las energías internas específicas en las secciones S_1 y S_2 , respectivamente, las que dependen de la temperatura del fluido en dichas secciones, v_1 y v_2 representan la velocidad normal media del flujo en las secciones S_1 y S_2 , respectivamente, y h_1 y h_2 denotan los niveles del centro de gravedad de las secciones S_1 y S_2 , respectivamente.

El trabajo mecánico W puede descomponerse como:

$$W = W_e + W_v + W_p$$

donde W_e denota el trabajo externo, es decir, el realizado sobre máquinas tales como bombas y turbinas, W_v es el trabajo realizado por los esfuerzos viscosos, y W_p es el trabajo realizado por las fuerzas de presión. Es fácil demostrar que:

$$\frac{dW_p}{dt} = \int_S p \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} p_2 v_{n2} dS_2 - \int_{S_1} p_1 v_{n1} dS_1$$

Reemplazando este último resultado en (14) es posible obtener:

$$G \left\{ \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right\} = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_e}{dt} - \frac{dW_v}{dt} \quad (15)$$

donde p_1 y p_2 denotan la presión en el centro de gravedad de las secciones S_1 y S_2 , respectivamente. Este resultado puede escribirse también como:

$$G \rho (B_2 - B_1) = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_e}{dt} - \frac{dW_v}{dt} - G (u_2 - u_1) \quad (16)$$

Para el caso de fluido ideal ($W_v = 0$), sin transferencia de calor ($d\hat{Q}/dt = 0$) y con presencia en el volumen de control de una máquina hidráulica de potencia:

$$P_e = \frac{dW_e}{dt}$$

donde $P_e > 0$ en el caso de una turbina y $P_e < 0$ en el caso de una bomba, se tiene:

$$B_2 - B_1 = -\frac{P_e}{\rho g Q} \quad (17)$$

donde $Q = G/\rho$ representa el caudal o flujo volumétrico de fluido.

En el caso de un fluido real: $W_v \neq 0$, es decir, existen esfuerzos viscosos que causan disipación de energía, transferencia de calor (i.e., $d\hat{Q}/dt \neq 0$) y variación de temperatura entre las secciones de entrada y salida del volumen de control (i.e., $u_1 \neq u_2$). En este caso es posible englobar los términos asociados a estos procesos en uno solo, denominado *pérdida friccional*, tal que la ecuación (16) se reduce a:

$$B_2 - B_1 = -\frac{P_e}{\rho g Q} - \Lambda_f \quad (18)$$

donde Λ_f corresponde al término de pérdida friccional, el que cuantifica la disipación de Bernoulli del flujo, en forma de calor, debido al efecto de las fuerzas viscosas actuando en el volumen de control.

Es posible demostrar que al liberar la aproximación de perfil uniforme de velocidad en la sección de escurrimiento se obtiene la misma ecuación anterior, con la salvedad que el Bernoulli, B , corresponde ahora a un Bernoulli total equivalente en la sección, definido como:

$$B = \alpha \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h$$

donde α es el *coeficiente de Coriolis* dado por:

$$\alpha = \frac{\int_S v^3 dS}{S \bar{v}^3}$$

donde \bar{v} representa la velocidad normal media en la sección de escurrimiento, definida como:

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{S}$$

5 Pérdidas Friccionales y Resistencia Hidráulica

Consideremos un tramo de tubería rectilínea de diámetro constante, D , inclinada en un ángulo α con respecto a la horizontal, por el cual circula un caudal constante Q (Fig. 4). Aplicando el *Teorema de Cantidad de Movimiento* al volumen de control de la Fig. 4, y considerando que el flujo es uniforme y permanente, y por lo tanto que la velocidad media del flujo permanece constante a lo largo de la tubería, es posible demostrar:

$$(p_1 - p_2) \frac{\pi D^2}{4} + \rho g \frac{\pi D^2}{4} \Delta x \sin \alpha - \tau_0 \pi D \Delta x = 0 \quad (19)$$

donde p_1 y p_2 representan la presión en las secciones (1) y (2) del volumen de control considerado, Δx denota la longitud de dicho volumen y τ_0 denota el esfuerzo de corte ejercido por el flujo sobre el perímetro mojado de la tubería.

Por otro lado, aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones (1) y (2) del volumen de control de la Fig. 4, se tiene:

$$B_1 = B_2 + \Lambda_f \quad (20)$$

o bien:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \Lambda_f \quad (21)$$

y, dado que $v_1 = v_2$ y $h_1 - h_2 = \Delta x \sin \alpha$, entonces:

$$p_1 - p_2 = \rho g (\Lambda_f - \Delta x \sin \alpha) \quad (22)$$

y reemplazando en (19) se obtiene finalmente:

$$\tau_0 = \rho g J \frac{D}{4} \quad (23)$$

donde $J = \Lambda_f / \Delta x$ es la pérdida friccional por unidad de longitud. Considerando además que $D/4$ representa el radio hidráulico de la tubería: $R_h = S/\chi$, con χ perímetro mojado del flujo, entonces el esfuerzo de corte se puede expresar en términos generales como:

$$\tau_0 = \rho g J R_h \quad (24)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo de corte actuando en la pared de la tubería determina la pérdida friccional del flujo.

La pérdida friccional puede estimarse usando la *ecuación de Darcy-Weisbach*:

$$J = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g}$$

donde f es el *coeficiente o factor de fricción*, cuyo valor depende del régimen de escurrimiento.

El régimen de escurrimiento en una tubería está determinado por el *número de Reynolds*, definido como:

$$Re = \frac{v D}{\nu}$$

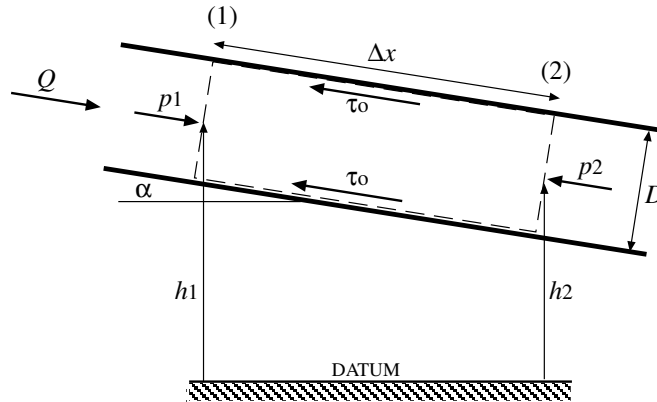


Figura 4: Flujo de un caudal Q en una tubería de diámetro D , inclinada en un ángulo α con respecto a la horizontal. Se considera un volumen de control contenido entre las secciones (1) y (2) separadas una distancia Δx .

El régimen de escurrimiento en la tubería es laminar si $Re \leq 2000$ y turbulento si $Re \geq 4000$. En el caso de régimen laminar, usando la ecuación de Navier-Stokes es posible obtener una expresión para la distribución de velocidades al interior de la tubería, la cual resulta ser parabólica. Con esta distribución de velocidades puede determinarse la velocidad media del flujo en la sección de escurrimiento y usando la expresión de Darcy-Weisbach se obtiene finalmente:

$$f = \frac{64}{Re}$$

En el caso de régimen turbulento, el factor de fricción depende adicionalmente de la rugosidad de la pared de la tubería. Una pared se denomina *hidrodinámicamente lisa* si la altura media de las asperezas o rugosidad de la pared, k_s , es inferior al espesor de la subcapa viscosa del flujo, δ . Este último puede estimarse a partir de la relación empírica: $\delta u_* / \nu \approx 5$, donde $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ y se denomina *velocidad de corte o friccional*. De esta forma, si $k_s u_* / \nu < 5$ entonces la pared resulta ser hidrodinámicamente lisa y el factor de fricción es independiente de la rugosidad de la tubería y puede estimarse a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \right)$$

Si, por el contrario, el espesor de la subcapa viscosa es mucho menor que la altura media de las asperezas, entonces la pared se denomina *hidrodinámicamente rugosa* y en ese caso el factor de fricción resulta ser independiente del número de Reynolds, es decir, de la viscosidad del fluido. Así, si $k_s u_* / \nu$ es superior a aproximadamente 30 a 70, entonces la pared resulta ser hidrodinámicamente rugosa y el factor de fricción depende solo de la *rugosidad relativa* de la tubería, k_s / D , y puede estimarse a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{3.7 D}{k_s} \right)$$

Si $5 < k_s u_* / \nu < 30 - 70$, la pared se denomina *hidrodinámicamente en transición lisa-rugosa* y en este caso el factor de fricción queda determinado tanto por el número de Reynolds como por la rugosidad relativa y puede estimarse a partir de la ecuación de *Colebrook-White*:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \operatorname{Log}_{10} \left(\frac{k_s}{3.7 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

La relación funcional entre el factor de fricción, f , y los parámetros Re y k_s/D en tuberías se representa gráficamente en el denominado *ábaco de Moody*, el cual permite identificar, además, los distintos regímenes de escurrimiento, así como también el tipo de pared hidrodinámica en el caso de régimen turbulento.