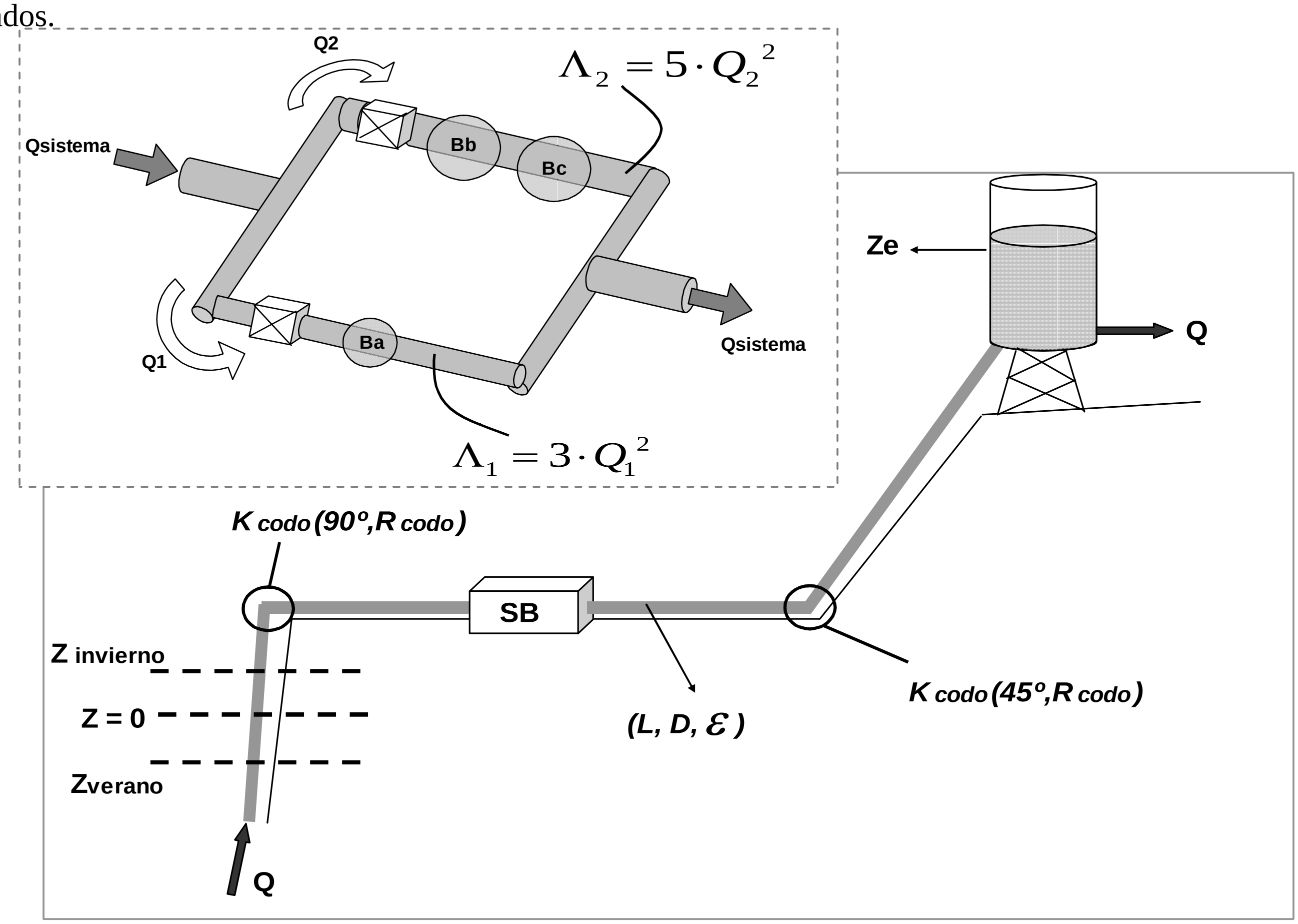
Control #1 (CI41A – Hidráulica)
Martes 05 de Septiembre 2006

P1.- Se requiere diseñar la operación de un sistema de bombeo, para la extracción de agua desde un embalse cercano a Santiago. Por ello, se le ha pedido a usted que estime la forma de operación de estas, para dos periodos críticos del año (verano e invierno). La operación consiste en abrir y cerrar las válvulas de cada una de las ramas del sistema de bombeo.

La suma de las pérdidas friccionales y singulares de la cada rama del sistema de bombas, se puede estimar mediante la ecuación entregada, la cual depende del caudal circulante por la rama correspondiente.

Las pérdidas singulares en el resto del sistema, deberán ser estimadas con los parámetros dados.



Las ecuaciones características de las bombas y la suma de pérdidas por cada rama, se entregan a continuación.

$$H_a = 50 - 10 \cdot Q_a^2 \qquad \Lambda_1 = 3 \cdot Q_1^2$$
$$H_b = 25 - 8 \cdot Q_b^2 \qquad \Lambda_2 = 5 \cdot Q_2^2$$
$$H_c = 30 - 9 \cdot Q_c^2$$

Indicación: Para el cálculo de las pérdidas singulares en codos, utilice las estimaciones para “Smooth Bend in Circular Pipe” – B.- Sharp Bends (pág. 2 apunte “Pérdidas Singulares”).

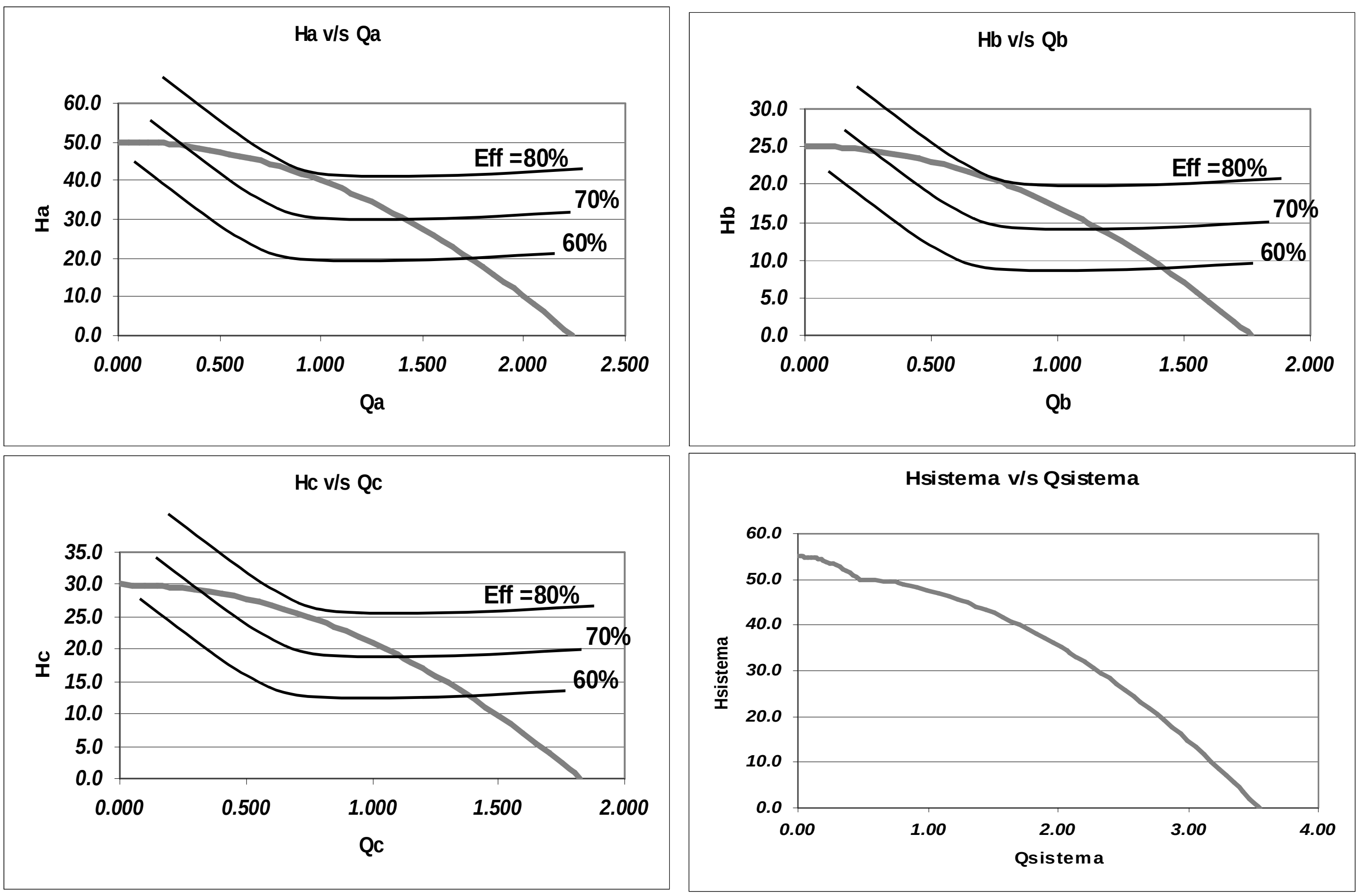
Se pide:

a.- Determine la altura de elevación requerida (para ser entregada por el sistema de bombas), en ambos casos (invierno y verano). (2 ptos.)

b.- Analice las posibles formas de operar el sistema en ambos casos (cada posibilidad tendrá un puntaje asociado), con sus respectivos parámetros: funcionamiento de bombas, altura de elevación entregada, caudal circulante por rama, altura de elevación a perder mediante la válvula. (2 ptos.)

c.- Analice e indique cuál será la opción más económica en cada uno de los casos posible. (2 ptos.)

Gráficos Curva Característica Bomba y Eficiencia



Datos:

$Z_{invierno}$ [m] =	5	L [m] =	500
$Q_{invierno}$ [mt^3/s] =	0,6	D [mm] =	600
Z_{verano} [m] =	- 3	ε [mm] =	0,05
Q_{verano} [mt^3/s] =	0,8	ν [m^2/s] =	$1,0 \times 10^{-6}$
Ze [m] =	20	R (codos) [m]=	0,45

Pauta P1 Control#1 Primavera 2006

a.- Determine la altura de elevación requerida (para ser entregada por el sistema de bombas), en ambos casos (invierno y verano). (2 ptos.)

La altura de elevación mínima requerida para la elevación de los caudales indicados, se calcula mediante la siguiente expresión. En donde $Z_{inicial}$, corresponde a la cota del embalse.

$$H_{SB} = Z_e - Z_{inicial} + \left(\frac{f\,L}{2gD} + K\left(90^o\right) + K\left(45^o\right) + K_{entrada} + K_{salida} \right) * \left(\frac{Q}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right)^2$$

Las pérdidas de entrada y salida son 0,5 y 1; respectivamente. Y las pérdidas en los codos se calcularán con las tablas y conociendo los ángulos y el radio de curvatura de los codos.

$$K\left(\theta^o\right) = F\left(\left(R/D\right);\mathrm{Re}\right)$$

En ambos casos el Re > $5x10^5$; y R/D = 0,75 < 2 , así podremos obtener de la tabla:

B. Sharp Bends, R/D ≤ 2 for UD/ν ≥ 5 × 10^5.

R/D	K, θ(degrees) 20	30	45	75	90	180
0.5	0.053	0.12	0.27	0.80	1.1	--
0.75	0.038	0.070	0.14	0.31	0.40	0.70
1.0	0.035	0.058	0.10	0.20	0.25	0.28
1.5	0.040	0.060	0.090	0.15	0.18	0.21
2.0	0.045	0.065	0.089	0.14	0.16	0.19

$$\mathrm{Re}_{invierno} = 1,27\,E6$$
$$\mathrm{Re}_{verano} = 1,7\,E6$$

$$\Rightarrow K\left(90^o\right) = 0,4$$
$$K\left(45^o\right) = 0,14$$

Sólo faltará calcular el coeficiente friccional para cada caso (invierno o verano):

INVIERNO:

D/ε =	**12000**	**Transición**	**v [m/s] =**	**2,122**
Re =	**1,27E+06**			
$f_{invierno}$=	**0,0116**	**0,013**	**0,0129**	**0,0129**

VERANO:

D/ε =	**12000**	**Transición**	**v [m/s] =**	**2,829**
Re =	**1,70E+06**			
f_{verano}=	**0,0116**	**0,0127**	**0,0126**	**0,0126**

Con lo que obtenemos las alturas dinámicas necesarias en ambas condiciones.

Hsb (invierno) [m] =	**26,656**
Hsb (verano) [m] =	**43,620**

b.- Analice las posibles formas de operar el sistema en ambos casos (cada posibilidad tendrá un puntaje asociado), con sus respectivos parámetros: funcionamiento de bombas, altura de elevación entregada, caudal circulante por rama, altura de elevación a perder mediante la válvula. (2 ptos.)

Para la estimación de los caudales circulante en el sistema, se utilizarán las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$H_1 = 50 - 13Q_1^2 \qquad H_2 = 55 - (8+9+5)Q_1^2$$

$$\Rightarrow Q_1 = \sqrt{\frac{50-H_1}{13}} \qquad \Rightarrow Q_2 = \sqrt{\frac{55-H_2}{22}}$$

Con esto, más la conservación del caudal:

$$Q_1 + Q_2 = Q_T \Rightarrow Q_1 = (Q_T - Q_2)$$

$$H_{sistema} = 50 - 13Q_1^2 = 55 - 22Q_2^2$$

$$Q_1 = Q_T - Q_2$$

$$\Rightarrow 50 - 13(Q_T - Q_2)^2 = 55 - 22Q_2^2$$

$$\Leftrightarrow 50 - 13\left(Q_T^2 - 2 \cdot Q_2 \cdot Q_T + Q_2^2\right) = 55 - 22Q_2^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot Q_2^2 + (26 \cdot Q_T) \cdot Q_2 - \left(5 + 13\left(Q_T^2\right)\right) = 0$$

$$Q_2 = \frac{-(26 \cdot Q_T) \pm \sqrt{(26 \cdot Q_T)^2 + 4 \cdot 9\left(5 + 13\left(Q_T^2\right)\right)}}{2 \cdot 9}$$

Caso invierno:

					Operan
Solución 1:	H1 [mt] =	45,32			
	Q1 [m^3/s] =	0,6			
	Perd Valv 1 [m] =	18,664			A
Solución 2:	H2 [mt] =	47,08			
	Q2 [m^3/s] =	0,6			
	Perd Valv 2 [m] =	20,424			B y C
Solución 3:	Hsist [mt] =	49,83	Q1 [m^3/s] =	0,115	
	Qsit [m^3/s] =	0,600	Q2 [m^3/s] =	0,485	
	Perd Valv 1 [m] =	23,173			
	Perd Valv 2 [m] =	23,173			A, B y C

$$Q_2 = \frac{-(26\cdot 0,6) \pm \sqrt{(26\cdot 0,6)^2 + 4\cdot 9\left(5+13\left(0,6^2\right)\right)}}{2\cdot 9}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \begin{cases} 0.485\, m^3/s \\ \cancel{-2.22\, m^3/s} \end{cases} \Rightarrow Q_1 = 0,115\, m^3/s$$

Caso verano:

					Operan
Solución 1:	H1 [mt] =	41,68			
	Q1 [mt^3/s] =	0,8			
	Perd Valv 1 [m] =	-1,940			No posible
Solución 2:	H2 [mt] =	40,92			
	Q2 [mt^3/s] =	0,8			
	Perd Valv 2 [m] =	-2,700			No posible
Solución 3:	Hsist [mt] =	49,00	Q1 [mt^3/s] =	0,277	
	Qsit [mt^3/s] =	0,800	Q2 [mt^3/s] =	0,522	
	Perd Valv 1 [m] =	5,380			
	Perd Valv 2 [m] =	5,380			A, B y C

$$Q_2 = \frac{-(26\cdot 0,8) \pm \sqrt{(26\cdot 0,8)^2 + 4\cdot 9\left(5+13\left(0,8^2\right)\right)}}{2\cdot 9}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \begin{cases} 0.522\, m^3/s \\ \cancel{-2.833\, m^3/s} \end{cases} \Rightarrow Q_1 = 0,277\, m^3/s$$

c.- Analice e indique cuál será la opción más económica en cada uno de los casos posible. (2 ptos.)

$$Pot_{electrica} = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

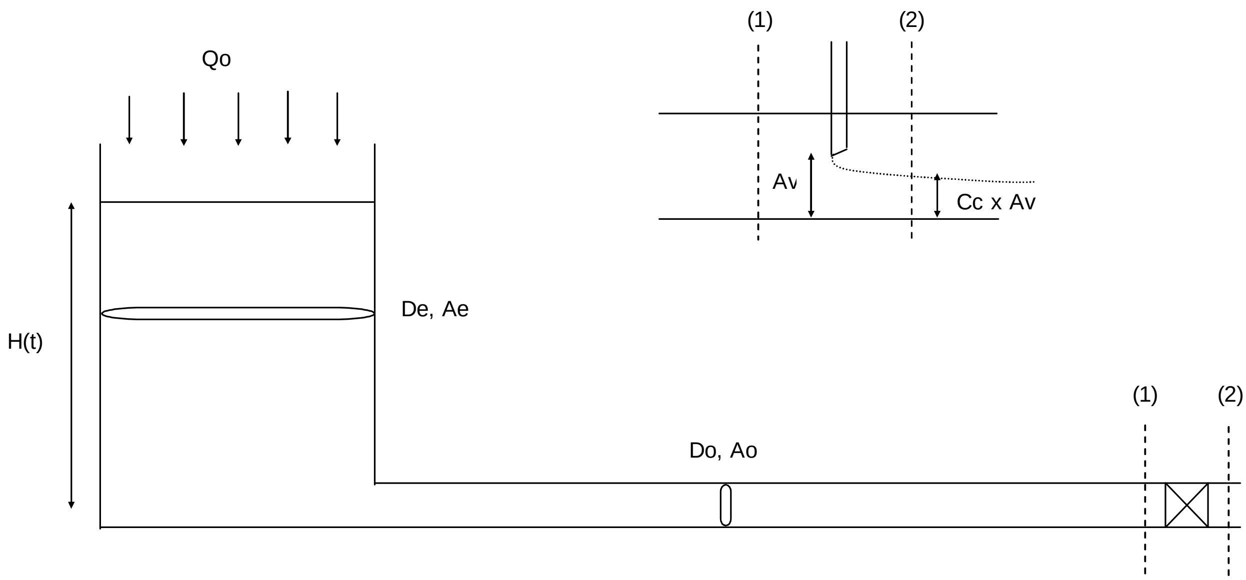
Caso invierno:

Potencia Eléctrica		
Solución 1:	Pot H1 [kW] =	-355,31
Solución 2:	Pot H2 [kW] =	-354,91
Solución 3:	Pot Hsist [kW] =	-401,74

Caso invierno:

Potencia Eléctrica		
Solución 1:	Pot H1 [kW] =	-435,70
Solución 2:	Pot H2 [kW] =	-411,29
Solución 3:	Pot Hsist [kW] =	-539,26

P2) Se tiene un estanque de área Ae que descarga a la atmósfera, mediante una tubería de área transversal Ao. La descarga del estanque se regula mediante una válvula ubicada en el extremo aguas abajo de la tubería. Adicionalmente, existe una recarga constante de valor Qo sobre el estanque.



Despreciando pérdidas singulares y friccionales del sistema:

Considerando que la altura del estanque varía con la expresión:

$$H(t) = Ho + \beta \cdot sen(\omega \cdot t) \qquad \beta, \omega \;\; ctes > 0$$

Encuentre una expresión para la apertura de la válvula en función del tiempo $Av(t)$.

Pauta P2 Control#1 Primavera 2006

a) En el estanque: $\dfrac{\partial V}{\partial t} = Q_{ENTRA} - Q_{SALE}$

$Q_{ENTRA} = Qo$ (0.5 Pto)
$Q_{SALE} = u \cdot Ao$ (0.5 Pto)

$$V = Ae \cdot H(t) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = Ae \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t} \qquad \text{(0.5 Pto)}$$

$$\Rightarrow Ae \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t} = Qo - u \cdot Ao \Rightarrow u = \frac{Qo}{Ao} - \frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial H(t)}{\partial t} \quad \text{(0.5 Pto)}$$

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = -\frac{Ae}{Ao} \cdot \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} \qquad \text{(0.5 Pto)}$$

Euler en la tubería: $\dfrac{L}{g} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} + B_1 - B_0 = 0$ (1)

$$u_1 \cdot Ao = u \cdot Ao = u_2 \cdot Cc \cdot Av \Rightarrow u_2(t) = \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av} \right) \cdot u(t) \qquad \text{(0.5 Pto)}$$

$$B_1 = B_2 = \frac{u_2^2}{2 \cdot g} = \left(\frac{Ao}{Cc \cdot Av} \right)^2 \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g} \qquad \text{(0.5 Pto)}$$

Para determinar B_0 se pueden tomar dos consideraciones distintas: (0.5 Pto)

- Despreciando altura de velocidad y efectos impermanentes (en la ecuación de Euler dentro del estanque):

  $$B_0 = H(t)$$

- Sin despreciar altura de velocidad y efectos impermanentes (en la ecuación de Euler dentro del estanque):

  $$\frac{H(t)}{g} \cdot \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} + B_0 - \left[\frac{\partial H(t)^2}{\partial t} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} + H(t) \right] = 0$$

  $$\Rightarrow B_0 = \left[\frac{\partial H(t)^2}{\partial t} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} + H(t) \right] - \frac{H(t)}{g} \cdot \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}$$

Reemplazando en (1)

$$\Rightarrow \frac{L}{g}\cdot -\frac{Ae}{Ao}\cdot\frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}+\left(\frac{Ao}{Cc\cdot Av}\right)^2\cdot\left[\frac{Qo}{Ao}-\frac{Ae}{Ao}\cdot\frac{\partial H(t)}{\partial t}\right]^2\cdot\frac{1}{2\cdot g}-H(t)=0 \text{ **ó**}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{g}\cdot -\frac{Ae}{Ao}\cdot\frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}+\left(\frac{Ao}{Cc\cdot Av}\right)^2\cdot\left[\frac{Qo}{Ao}-\frac{Ae}{Ao}\cdot\frac{\partial H(t)}{\partial t}\right]^2\cdot\frac{1}{2\cdot g}-\left[\frac{\partial H(t)^2}{\partial t}\cdot\frac{1}{2\cdot g}+H(t)\right]+\frac{H(t)}{g}\cdot\frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}=0$$

(0.5 Pto)

Además, $H(t)=Ho+\beta\cdot sen(\omega\cdot t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial H(t)}{\partial t}=\beta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\textbf{;}\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}=-\beta\cdot\omega^2\cdot sen(\omega\cdot t)\ \text{(0.5 Pto)}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{g}\cdot\left(-\frac{Ae}{Ao}\cdot -\beta\cdot\omega^2\cdot sen(\omega\cdot t)\right)+\left(\frac{Ao}{Cc\cdot Av}\right)^2\cdot\left[\frac{Qo}{Ao}-\frac{Ae}{Ao}\cdot\beta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]^2\cdot\frac{1}{2\cdot g}-\left(Ho+\beta\cdot sen(\omega\cdot t)\right)=0$$

ó

$$\Rightarrow \frac{L}{g}\cdot\left(-\frac{Ae}{Ao}\cdot -\beta\cdot\omega^2\cdot sen(\omega\cdot t)\right)+\left(\frac{Ao}{Cc\cdot Av}\right)^2\cdot\left[\frac{Qo}{Ao}-\frac{Ae}{Ao}\cdot\beta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]^2\cdot\frac{1}{2\cdot g}-\left[\beta^2\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)^2\cdot\frac{1}{2\cdot g}+Ho+\beta\cdot sen(\omega\cdot t)\right]$$

$$+\left(Ho+\beta\cdot sen(\omega\cdot t)\right)\cdot\frac{-\beta\cdot\omega^2\cdot sen(\omega\cdot t)}{g}=0$$

Ecuaciones de las cuales es posible despejar $Av(t)$ (1.0 Pto)