EJEMPLO REGIMEN IMPERMANENTE EN TUBERIAS
METODO INELASTICO

Oscilación en un Tubo en U con Resistencia Laminar

Considérese el problema de la oscilación de un volumen de líquido dentro de un tubo en U, suponiendo que el régimen de escurrimiento es laminar.

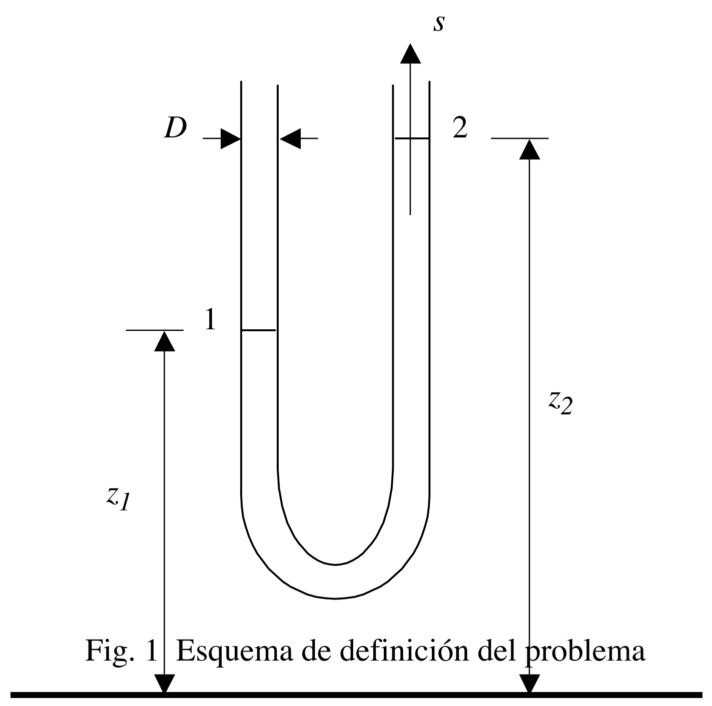


Fig. 1 Esquema de definición del problema

La ecuación de Euler con pérdidas friccionales es:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla B + \frac{f}{D}\frac{u^2}{2g} = 0 \tag{1}$$

Para el caso de flujo laminar se tiene $f = 64/\mathrm{Re} = 64\,\nu/(u\,D)$, de modo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla B + \frac{32\,\nu}{g\,D^2}\,u = 0 \tag{2}$$

De la ecuación de continuidad se tiene que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, pero como $\vec{v} = u\,\hat{s}$, entonces se cumple que $\partial u/\partial s = 0$, y la velocidad u resulta ser independiente de s.

Integrando entre las secciones 1 y 2 de la Fig. 1:

$$\int_1^2 \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\, ds + \int_1^2 \frac{\partial B}{\partial s}\, ds + \int_1^2 \frac{32\, u\, \nu}{g\, D^2}\, ds = 0 \tag{3}$$

o bien:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\int_1^2 ds + B_2 - B_1 + \frac{32\, u\, \nu}{g\, D^2}\int_1^2 ds = 0 \tag{4}$$

y como $\int_1^2 ds = L$, donde L representa la longitud del volumen de líquido al interior del tubo en U, entonces se obtiene:

$$\frac{L}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + B_2 - B_1 + \frac{32\, L\, \nu}{g\, D^2}\, u = 0 \tag{5}$$

Pero el Bernoulli en las secciones 1 y 2 se puede evaluar como:

$$B_1 = \frac{u^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u^2}{2g} + z_1 \tag{6}$$

$$B_2 = \frac{u^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{u^2}{2g} + z_2 \tag{7}$$

de modo que: $B_2 - B_1 = z_2 - z_1$

Por otro lado, es posible relacionar la velocidad del flujo en el tubo en U, con la velocidad a la que se desplaza la superficie libre en cada una de sus ramas. Para la dirección s definida en la Fig. 1, se tiene:

$$u = -\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt} \qquad ; \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 z_2}{dt^2} \tag{8}$$

De este resultado se llega a que:

$$2u = \frac{d(z_2 - z_1)}{dt} \qquad ; \qquad 2\frac{du}{dt} = -\frac{d^2(z_2 - z_1)}{dt^2} \tag{9}$$

y reemplazando en la ec. (5), se obtiene:

$$\frac{L}{2g}\frac{d^2(z_2 - z_1)}{dt^2} + (z_2 - z_1) + \frac{32\, L\, \nu}{2g\, D^2}\frac{d(z_2 - z_1)}{dt} = 0 \tag{10}$$

o bien, llamando el desnivel entre ramas $\eta = z_2 - z_1$:

$$\frac{L}{2g}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta + \frac{16\,L\nu}{g\,D^2}\frac{d\eta}{dt} = 0 \tag{11}$$

ecuación que puede ser ordenada de modo que:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{32\,\nu}{D^2}\frac{d\eta}{dt} + \frac{2g}{L}\eta = 0 \tag{12}$$

Las condiciones iniciales de este problema son las siguientes:

$$\eta(0) = \eta_0 \qquad ; \qquad u(0) = \frac{1}{2}\frac{d\eta(0)}{dt} = 0$$

que equivalen a imponer un desnivel inicial entre ramas, situación para la que la velocidad del flujo es nula.

La ec. (12) es una e.d.o. lineal de segundo orden, con solución analítica conocida. La solución está dada por:

$$\eta = c_1\,e^{m_1 t} + c_2\,e^{m_2 t} \tag{13}$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración que se evalúan a partir de las condiciones iniciales y los valores m_1 y m_2 son soluciones de la ecuación:

$$m = \frac{1}{2}\left(-\frac{32\,\nu}{D^2} \pm \sqrt{\left(\frac{32\,\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{8g}{L}}\right) \tag{14}$$

de donde se concluye que m_1 y m_2 pueden ser reales o complejos.

Analizando los casos posibles, se tiene:

- Caso de fricción nula, es decir cuando se tiene fluido ideal ($\nu = 0$):

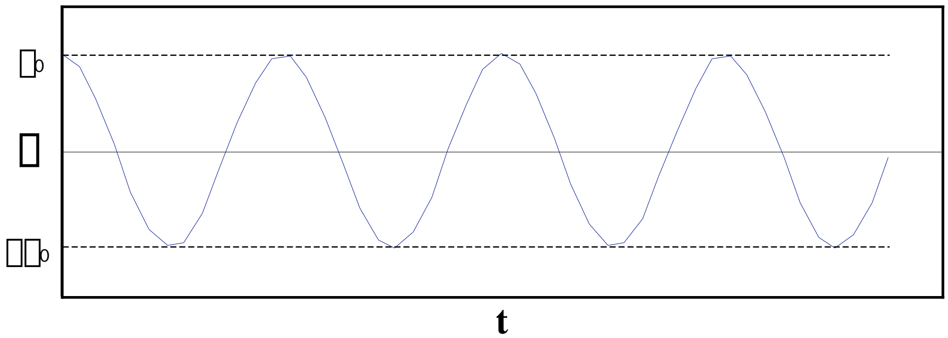
  En este caso, el problema es el de un tubo en U en el que los niveles oscilan indefinidamente en el tiempo, dado que no existe fricción que permita disipar la energía potencial entregada al sistema al imponer el desnivel inicial η_0. En este caso la ec. (12) representa un movimiento armónico simple y las soluciones de m son imaginarias.

  La solución para η está dada por:

$$\eta = \eta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t\right) \tag{15}$$

la que se grafica en la Fig. 2.

Fig. 2 Oscilación en el tubo en U. Caso sin fricción.



- Caso en que $(\frac{32\nu}{D^2})^2 - \frac{8g}{L} > 0$:

En este caso ambas soluciones de m son reales. La solución para ζ está dada por:

$$\zeta = \zeta_0 \frac{1}{(m_1 - m_2)} (-m_2 \, e^{m_1 t} + m_1 \, e^{m_2 t}) \tag{16}$$

donde:

$$m_1 = -\frac{16\nu}{D^2} - \sqrt{(\frac{16\nu}{D^2})^2 - \frac{2g}{L}} \tag{17}$$

$$m_2 = -\frac{16\nu}{D^2} + \sqrt{(\frac{16\nu}{D^2})^2 - \frac{2g}{L}} \tag{18}$$

Tanto m_1 como m_2 son negativos en este caso, y $m_1 < m_2$.

El comportamiento que se obtiene es el que se muestra en la Fig. 3, donde el desnivel entre las ramas decrece monótona y asintóticamente a cero. Este caso ocurre cuando la resistencia friccional es mayor que la inercia inducida por el campo gravitacional.

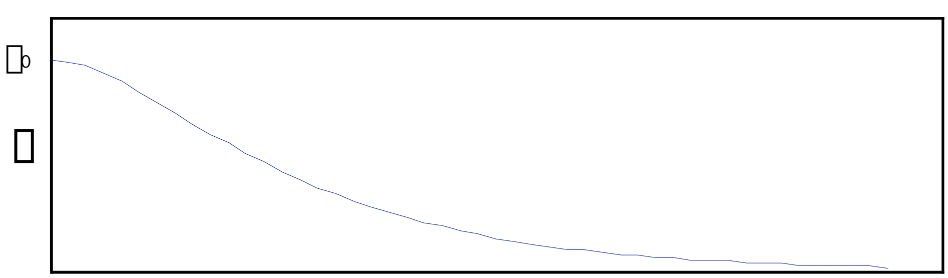


Fig. 3 Oscilación en el tubo en U. Caso en que la fricción domina sobre la inercia.

Dentro de este caso, una situación extrema ocurre cuando la gravedad no existe. Ello implica que $m_2 = 0$, con lo que se llega a $\eta = \eta_0$, y se concluye que el desnivel entre las ramas del tubo en U se mantiene indefinidamente.

- Caso en que $(\frac{32\nu}{D^2})^2 - \frac{8g}{L} < 0$:

En este caso las soluciones de m son complejos. El comportamiento que se obtiene es una combinación de los casos anteriores, es decir, el desnivel entre ramas tiende a oscilar, pero esa oscilación es amortiguada, por efecto de la disipación de energía producto de la fricción, de modo que la amplitud de las oscilaciones decrece asintóticamente a cero. La solución para η está dada por:

$$\eta = \eta_0 \, e^{-\frac{16\nu}{D^2} t} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L} - (\frac{16\nu}{D^2})^2} \; t \right) \tag{15}$$

La Fig. 4 ilustra este caso, el cual ocurre cuando la inercia del volumen de agua, inducida por el campo gravitacional es mayor que la resistencia friccional.

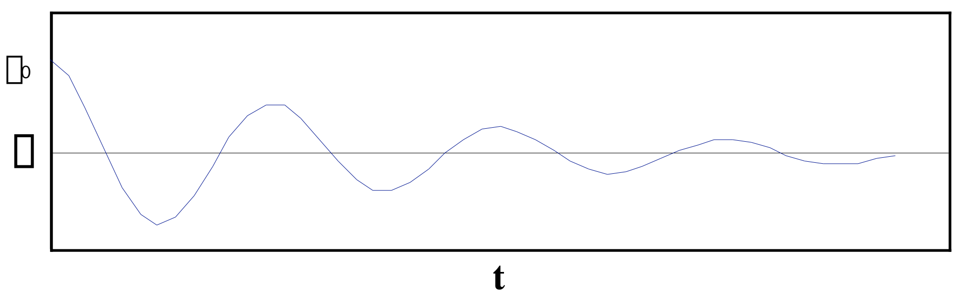


Fig. 4 Oscilación en el tubo en U. Caso en que la inercia domina sobre la fricción.