Sem. Primavera 2006
Auxs.: Amparo Edwards
Cristián Godoy

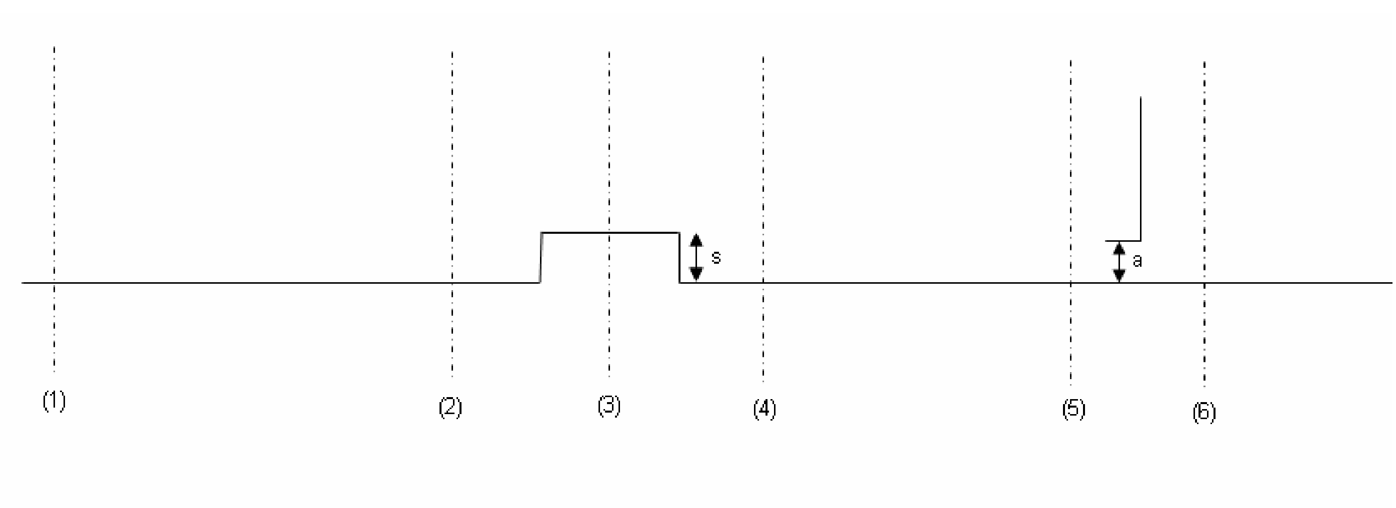
Clase Auxiliar #4
Martes 26 de Septiembre 2006

P1.- Se analiza el escurrimiento en un canal de laboratorio de sección rectangular de 30 cm de ancho. El canal tiene una compuerta y, aguas arriba de ella, una grada de altura *s* (7 cm), como se esquematiza en la figura. El extremo aguas arriba del canal (sección 1), está siempre influida por aguas abajo.

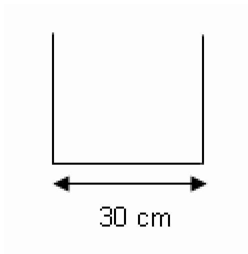
a) Cuando la compuerta se encuentra abierta una distancia $a = 2{,}5\,\text{cm}$, se mide la altura de escurrimiento antes y después de la compuerta, siendo estas alturas $h_5 = 30\,\text{cm}$ y $h_6 = 1{,}5\,\text{cm}$, respectivamente. Se pide determinar el caudal que escurre por el canal y la altura de escurrimiento en las secciones 1, 2, 3 y 4.

b) Si se aumenta la abertura de la compuerta a $a = 4{,}5\,\text{cm}$ (y el caudal no cambia respecto a la situación anterior), se pide determinar las nuevas alturas en las secciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La sección 6 no depende de las condiciones de aguas abajo.

Considerar que no existe pérdida de energía entre las secciones 2 y 3, ni entre las secciones 3 y 4. Despreciar la fricción.



Pauta P1 Clase Auxiliar #4 Primavera 2006



a) $a = 2{,}5\,\text{cm};\ h_5 = 30\,\text{cm};\ h_6 = 1{,}5\,\text{cm}$

No hay pérdidas de energía:

$$\Rightarrow E_5 = E_6 \qquad E = h + \frac{v^2}{2\cdot g} = h + \frac{q^2}{2\cdot g\cdot h^2}$$

$$\Rightarrow 30 + \frac{q^2}{2\cdot 980\cdot 30^2} = 1{,}5 + \frac{q^2}{2\cdot 980\cdot 1{,}5^2} \Rightarrow q = 354{,}96\,\text{cm}^3/\text{cm/s} \Rightarrow Q = 10648{,}8\,\text{cm}^3/\text{s}$$

Calculemos la Energía Crítica, E_C:

$$E_C = \frac{3}{2}\cdot h_C \qquad h_C = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = 5{,}047\,\text{cm}$$

$$E_C = 7{,}571\,\text{cm}$$

Supongamos que la compuerta controla el sistema:

$$\Rightarrow E_4 = E_5 = E_6 = h_6 + \frac{q^2}{2\cdot g\cdot h_6^2} = 30{,}071\,\text{cm}$$

$$E_3 + s = E_4$$

$$E_3 = E_4 - s = 30{,}071 - 7 = 23{,}071\,\text{cm} > E_C$$

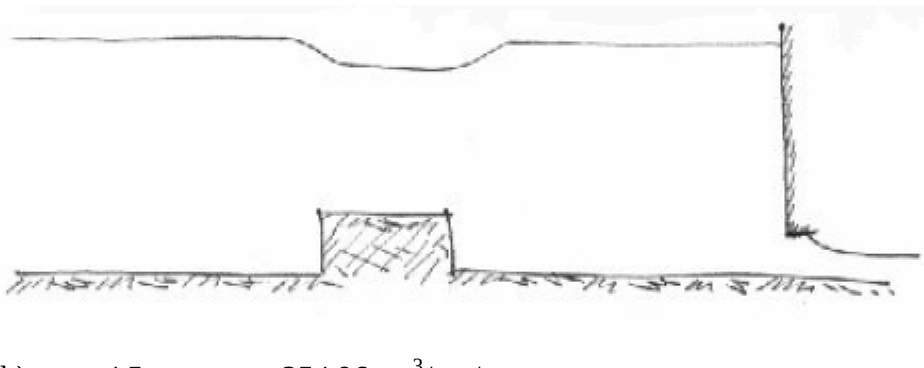
Como la energía E_3 es mayor que E_C, la grada se ve influenciada por la compuerta, es decir, esta última controla el sistema.

$$E_3 = 23{,}071 = h_3 + \frac{q^2}{2\cdot g\cdot h_3^2} \Rightarrow h_3 = \begin{cases} 1{,}736 \\ 22{,}945 \\ -1{,}614 \end{cases}$$

Como la compuerta controla, la sección 3 está condicionada por aguas abajo $\Rightarrow$ régimen subcrítico:

$h_3 = 22{,}945 \text{ cm}$

$E_1 = E_2 = E_4 = E_5 \Rightarrow h_1 = h_2 = h_4 = h_5 = 30 \text{ cm}$



b) $a = 4{,}5 \text{ cm}$; $q = 354{,}96 \text{ cm}^3/\text{cm/s}$

Supongamos que la compuerta está controlando el sistema:

$\Rightarrow h_6 = \mu \cdot a$

$\mu = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$ (parte a))

$\Rightarrow h_6 = 0{,}6 \cdot 4{,}5 = 2{,}7 \text{ cm}$

$$E_6 = h_6 + \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot h_6^2} = 11{,}518 \text{ cm}$$

$$E_5 = E_6 \Rightarrow h_5 + \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot h_5^2} = 11{,}518 \Rightarrow h_5 = \begin{cases} 2{,}7 \\ 10{,}985 \\ -2{,}167 \end{cases}$$

h_5 es controlado por aguas abajo, $\Rightarrow h_5 = 10{,}985 \text{ cm}$

$E_4 = E_5$; h_4 controlado por aguas abajo $\Rightarrow h_4 = 10{,}985 \text{ cm}$

Ahora calculemos la energía en la grada:

$E_3 = E_4 - s = 11{,}518 - 7 = 4{,}518 \text{ cm} < E_C$

La energía en 3 no puede ser menor que la mínima (E_C)

$\Rightarrow$ Ocurre crisis en la grada!!!

$E_3 = E_C = 7{,}571\,\text{cm}$
$h_3 = h_C = 5{,}047\,\text{cm}$

$E_1 = E_2 = E_3 + s = 14{,}571\,\text{cm}$

$$14{,}571 = h + \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot h^2} \Rightarrow h = \begin{cases} -1{,}97 \\ 2{,}288 \\ 14{,}255 \end{cases}$$

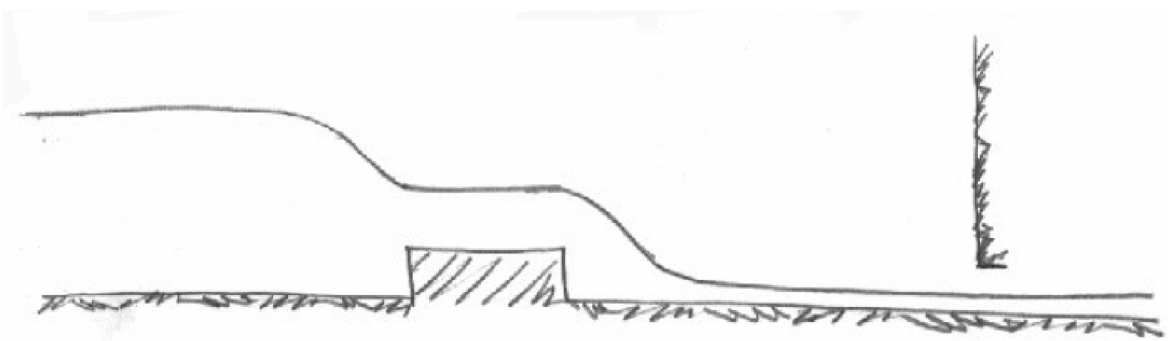
Condicionado por aguas abajo: $h_1 = h_2 = 14{,}255\,\text{cm}$

La sección 4 podría estar o no controlada por aguas abajo, por lo que se pueden dar dos situaciones:

1.- Crisis en la grada solamente: h_4 controlado por aguas arriba $\Rightarrow$ supercrítico

$E_4 = 14{,}571 \Rightarrow h_4 = 2{,}288\,\text{cm}$
$E_4 = E_5$; h_5 supercrítico, pasa por debajo de la compuerta!!!

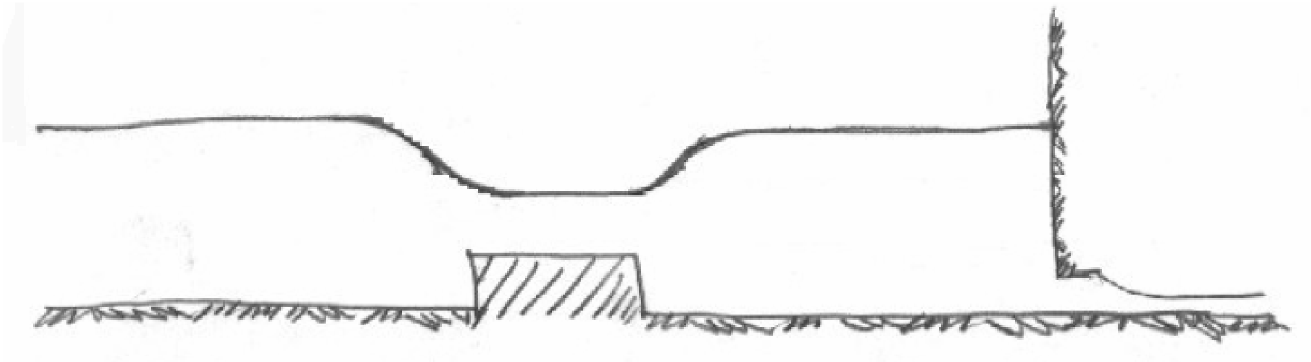
$h_5 = h_6 = 2{,}288\,\text{cm}$



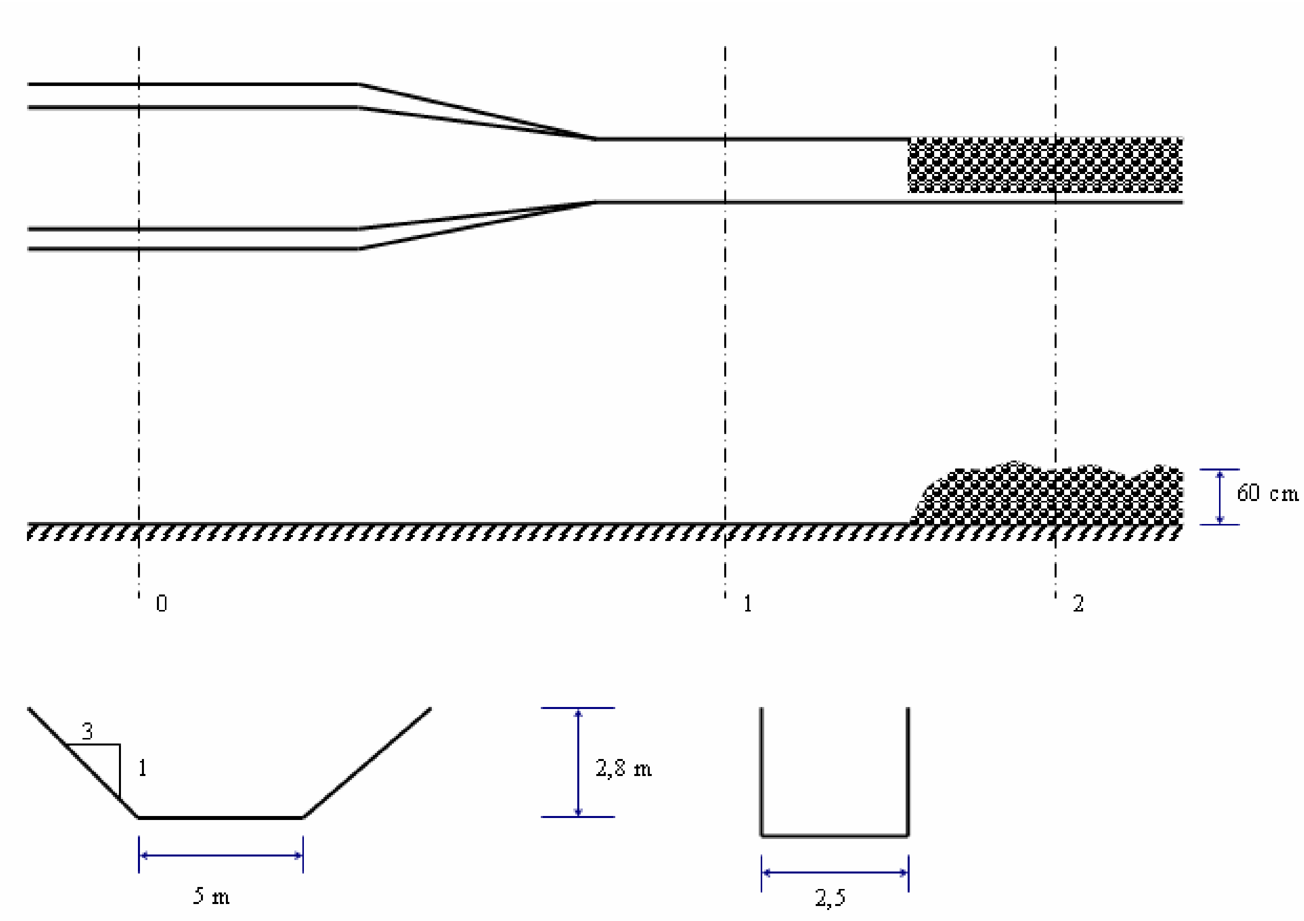
2.- Crisis en la grada y compuerta controlando

$h_6 = 2{,}288\,\text{cm}$ (supercrítico)
$h_5 = 14{,}255\,\text{cm}$ (subcrítico)
$h_4 = h_5 = 14{,}255\,\text{cm}$ (controlado por la compuerta)

En este caso: h_4 no podría ser supercrítico (controlado por la grada), porque tendría que formarse resalto entre 4 y 5 y no se puede porque no hay pérdida de energía.



P2.- Un canal muy largo está compuesto por un tramo de sección trapecial seguido por una sección rectangular, como se muestra en la figura, el que se ubica en la ladera de un cerro. El canal conduce un caudal de 15 m^3/s con una altura de escurrimiento de 2,5 m en la sección rectangular. Debido a un derrumbe, se depositan rocas en el canal rectangular, peraltando el fondo en 60 cm en un tramo muy largo. Determinar si el derrumbe alteró la capacidad del canal (o sea, si puede seguir conduciendo 15 m^3/s sin que desborde). Despreciar pérdidas de energía.



Pauta P2 Clase Auxiliar #4 Primavera 2006

Si no hay pérdidas en la transición, ni tampoco pérdidas friccionales:

$$B_{REC} = B_{TRAP} \Rightarrow E_{REC} = E_{TRAP}$$

$$E_{REC} = h + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$v = \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{15}{2{,}5 \cdot 2{,}5} = 2{,}4\,\text{m/s}$$

$$E_{REC} = 2{,}794\,\text{m}$$

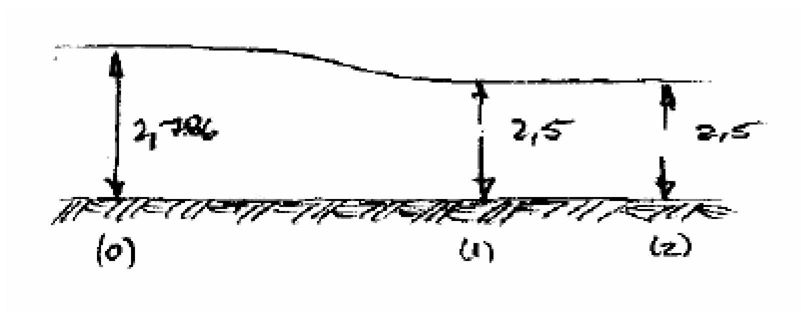
$$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot h} = 0{,}235 < 1 \Rightarrow \text{río}$$

Calculemos la altura en el canal trapecial:

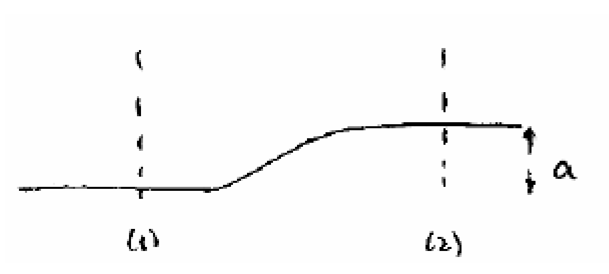
$$E_{TRAP} = h_T + \frac{v_T^2}{2 \cdot g};\ v_T = \frac{Q}{A_T};\ A_T = h_T \cdot b_T + 3 \cdot h_T^2$$

$$E_{TRAP} = h_T + \frac{15^2}{19{,}6 \cdot h_T^2 \cdot (5 + 3 \cdot h_T)^2} = 2{,}794 \Rightarrow h_T = \begin{cases} 2{,}786 \\ 0{,}357 \end{cases} + 3 \text{ soluciones negativas}$$

$$\text{Río} \Rightarrow h_T = 2{,}786\,\text{m}$$



Al caer los escombros:



$B_{REC} = B_{REC.ESC} \Rightarrow E_{REC} = E_2 + a \Rightarrow E_2 = 2{,}194\,\mathrm{m}$

¿Cuál es la energía mínima necesaria para que pasen $Q = 15$ m^3/s por el canal?

$$E_C = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = 2{,}314\,\mathrm{m} \Rightarrow E_2 < E_C$$

Por lo tanto, va a existir crisis en la sección 2, sobre los escombros.

Altura crítica en la sección 2, $h_C = \frac{2}{3}\cdot E_C = 1{,}543\,\mathrm{m}$

$a + h_C = 2{,}143\,\mathrm{m}$ < 2.8 m OK!

Altura en la sección 1:

$E_1 = E_C + a = 2{,}914\,\mathrm{m}$

$$\Rightarrow h_1 + \frac{Q^2}{2\cdot g\cdot h^2\cdot b^2} = 2{,}914\,\mathrm{m} \Rightarrow h = \begin{cases} 2{,}653 & < 2{,}8 \text{ OK!} \\ -0{,}712 & \\ 0{,}973 & \end{cases}$$

Dada la altura en el canal rectangular, calculamos la energía, y luego podemos obtener la altura en el tramo trapecial

$E_T = E_1 = 2{,}914$

$$h_T + \frac{11{,}48}{h_T^2\cdot(5 + 3\cdot h_T)^2} = 2{,}914 \Rightarrow h_T = \begin{cases} 2{,}907 \\ 0{,}350 \end{cases} \quad + \text{ 3 soluciones negativas}$$

2,907 > 2,8 $\Rightarrow$ Se desborda.