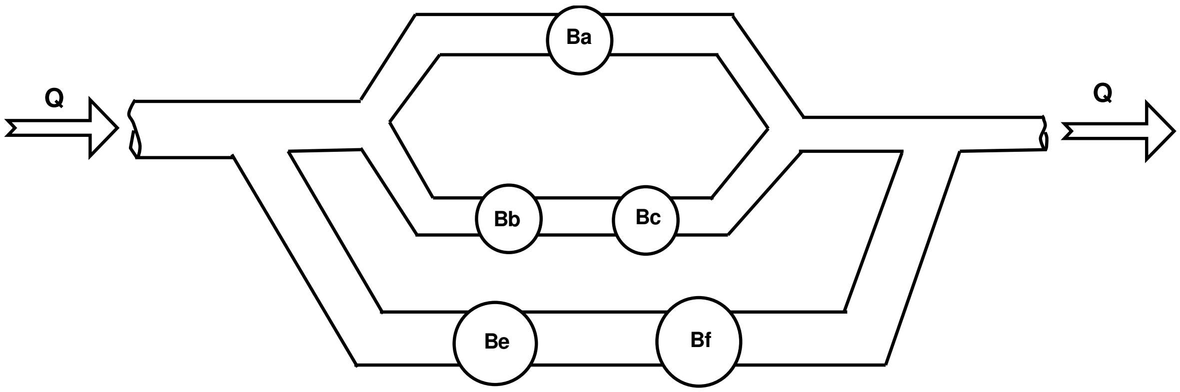
CI41A – Mecánica de Fluidos — Sem. Primavera 2006
Prof. Yarko Niño — Auxs.: Amparo Edwards
Cristián Godoy

CI41A - Ejercicio #2
Martes 22 de Agosto 2006

P1.- Se tiene el sistema de bombeo mostrado en la Figura 1, en donde se tienen dos ramas, una superior, compuesta por un sistema de bombas en paralelo, y otra inferior, compuesta por bombas en serie. De la configuración se conocen las curvas características de todas las bombas que componen el sistema. Además, se sabe que las pérdidas, tanto friccionales como singulares, son despreciables en el sistema de bombeo.
La altura de elevación entregada por las bombas está dada en metros y los caudales están medidos en [m^3/s].

Se le pide:

a) Encuentre los rangos de operación de cada una de las bombas. (1.0 Pto)
b) Encuentre la curva característica de las sub-ramas (sistema superior (A,B,C) y sistema inferior (E,F)). Basta con deducir las ecuaciones y los rangos de validez. (3.0 Pto)
c) Dibuje la curva característica del sistema completo, identificando con valores los puntos de interés (todos aquellos en que la curva cambie su tendencia parametrización). (2.0 Pto)



Datos:

$$H_a = 40 - 10 \times Q_a^{\,2}\,[m];\; H_b = 30 - 12 \times Q_b^{\,2}[m]$$
$$H_c = 20 - 9 \times Q_c^{\,2}\,[m];\; H_e = 60 - 8 \times Q_e^{\,2}[m]$$
$$H_f = 50 - 12 \times Q_f^{\,2}\;[m]$$

Pauta P1 Ejercicio #2 CI41A Prim 2006

Conociendo la curvas características de cada una de las bombas, podremos tener ecuaciones para H(Q) y Q(H), de la siguiente forma:

$$H_a = 40 - 10 \times Q_a^{\,2} \; ; \; H_b = 30 - 12 \times Q_b^{\,2} \; ; \; H_c = 20 - 9 \times Q_c^{\,2}$$

$$H_e = 60 - 8 \times Q_e^{\,2} \; ; \; H_f = 50 - 12 \times Q_f^{\,2}$$

$$Q_a = \sqrt{\frac{40 - H_a}{10}} \; ; \; Q_b = \sqrt{\frac{30 - H_b}{12}} \; ; \; Q_c = \sqrt{\frac{20 - H_c}{9}}$$

$$Q_e = \sqrt{\frac{60 - H_e}{8}} \; ; \; Q_f = \sqrt{\frac{50 - H_f}{12}}$$

Los rangos de validez de estas ecuaciones se adjuntan a continuación:

Resumen					
H (Q)			**Q**		
0,00	**<Ha<**	40	0	**<Qa<**	2,000
0,00	**<Hb<**	30	0	**<Qb<**	1,581
0,00	**<Hc<**	20	0	**<Qc<**	1,491
0,00	**<He<**	60	0	**<Qe<**	2,739
0,00	**<Hf<**	50	0	**<Qf<**	2,041

Desarrollando las ecuaciones para la rama superior, y verificando los intervalos de validez, se obtienen las siguientes ecuaciones para la rama superior:

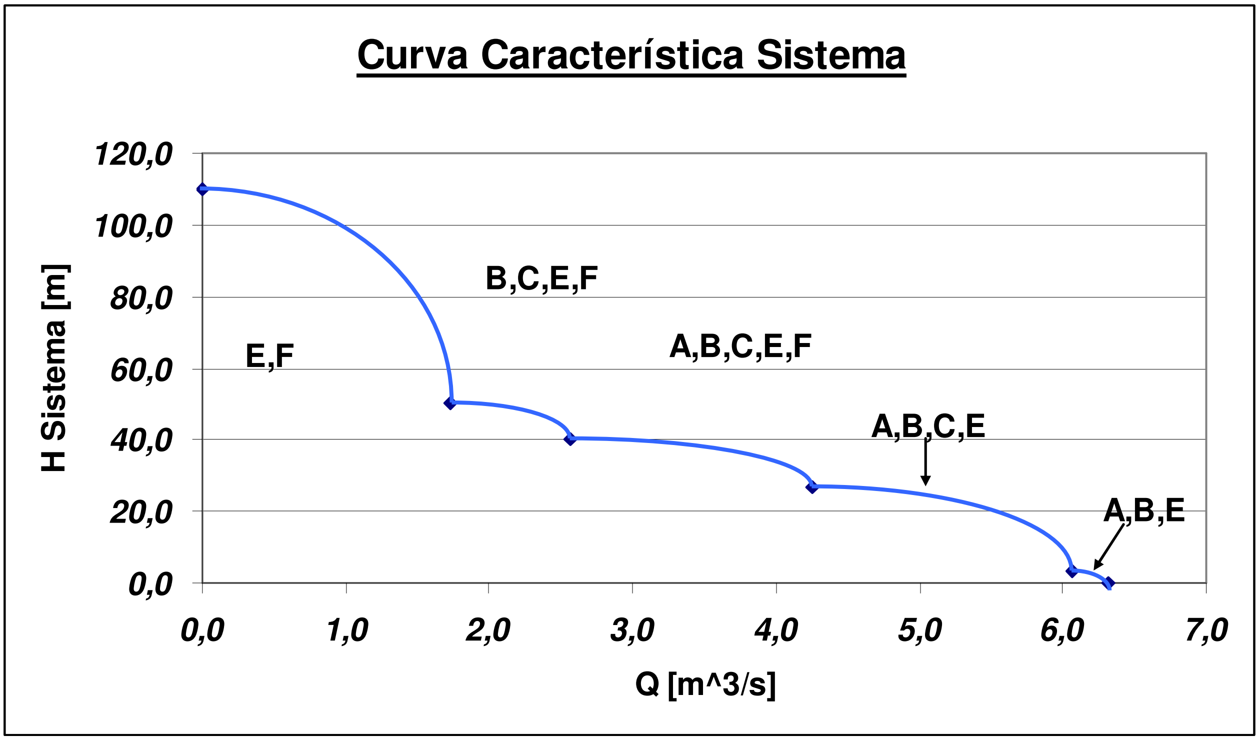
Ha ó H(b+c)	Ha	H(b+c)	Qa	Q(b,c)	Qa + Q(b,c)	Funcionan
50,000		50,000	0,000	0,000	0,000	B,C
40,000	40,000	40,000	0,000	0,690	0,690	A,B,C
26,667	26,667	26,667	1,155	1,054	2,209	A,B,C
3,333	3,333	3,333	1,915	1,491	3,406	A,B,C (C)
0,000	0,000	0,000	2,000	1,581	3,581	A,B (A,B)

Análogamente para la rama inferior se tiene:

H (e+f)	Q (e,f)	
110,000	0,000	E,F
50,000	1,732	E,F
40,000	1,871	E,F
26,667	2,041	E,F (F)
3,333	2,661	E
0,000	2,739	E (E)

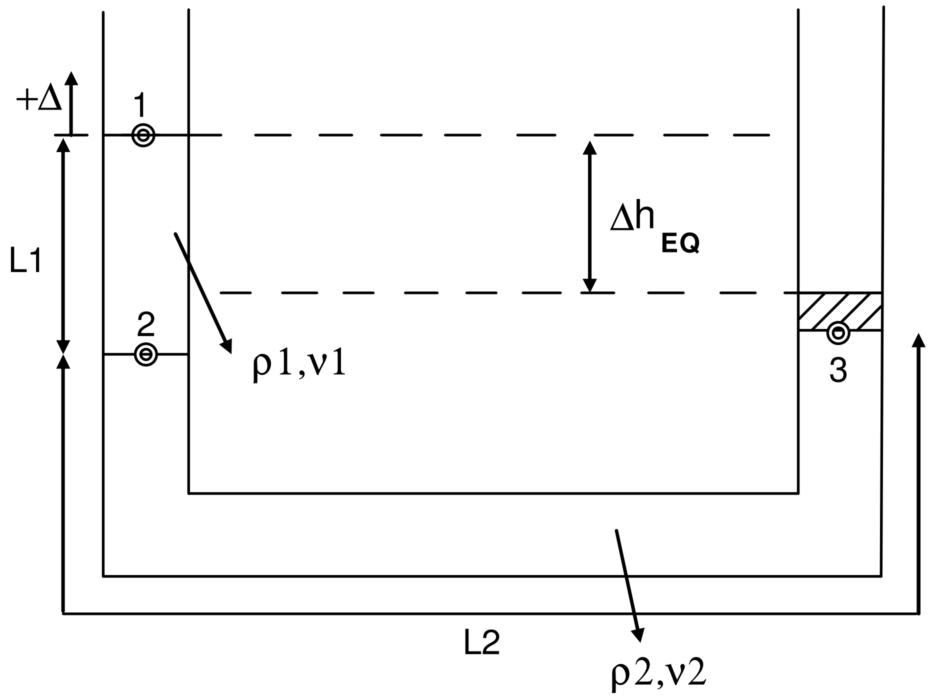
Con lo que sumando los caudales de ambas ramas se obtiene la curva característica del sistema completo. Los intervalos son los siguientes:

H(e+f ; a,b+c)	Qe,f + Qa + Qb,c	
110,000	0,000	E,F
50,000	1,732	B,C,E,F
40,000	2,561	A,B,C,E,F
26,667	4,250	A,B,C,E,F (F)
3,333	6,067	A,B,C,E (C)
0,000	6,320	A,B,E (A,B,E)



P2.- Un tubo en U, de diámetro D, contiene dos líquidos como se muestra en la figura. En la rama derecha se deposita un disco de peso W, cuyo roce con las paredes es despreciable.

Condición Inicial (Equilibrio)

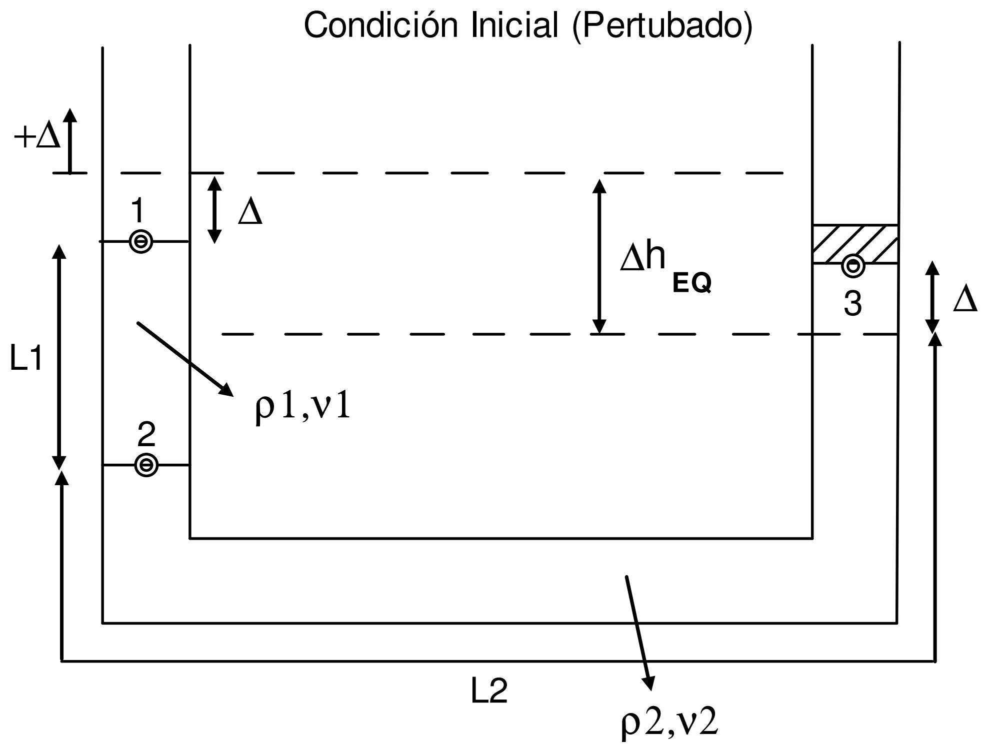


a) Considerando que la interfaz de los líquidos se mantiene siempre en la rama izquierda, que el movimiento se realiza en régimen laminar y que en t = 0 la superficie libre del líquido de densidad ρ_1 se desplaza de su posición de equilibrio una distancia Δ hacia abajo, se pide determinar la ecuación diferencial que rige el movimiento de la superficie libre. (5.0 Pto)

b) Mencione los posibles comportamientos del sistema, dependiendo de las fuerzas que predominen. (de inercia o viscosas). Analice la solución de la ecuación característica de la ecuación diferencial resultante y esquematice gráficamente la solución $\Delta(t)$. (1.0 Pto)

Indicación: Considere que inicialmente (en equilibrio) la diferencia de altura entre los puntos 1 y 3 es Δh_{EQ}.

Pauta P2 Ejercicio #2 CI41A Primavera 2006



a)

Euler en cada líquido:

$$\frac{L_1}{g}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t}+B_1-B_{21}+\Lambda_{21}=0 \quad (1) \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

$$\frac{L_2}{g}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial t}+B_{22}-B_3+\Lambda_{32}=0 \quad (2) \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

Régimen Laminar $\rightarrow f=\frac{64}{\text{Re}}=\frac{64\cdot\nu}{u\cdot D}\Rightarrow\Lambda=\frac{32\cdot\nu\cdot u\cdot L}{g\cdot D^2}$

$$B_1=\frac{u_1^2}{2\cdot g}+z_1 \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

$$B_{21}=\frac{u_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma_1}+(z_1-L_1) \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

$$B_{22}=\frac{u_2^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma_2}+(z_1-L_1) \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

$$B_3=\frac{u_2^2}{2\cdot g}+\frac{p_3}{\gamma_2}+z_2 \qquad (0.5\ \text{Pto})$$

No hay cambio de diámetro $\Rightarrow u_1 = u_2 = u$

(1) $$\Rightarrow \frac{L_1}{g}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u^2}{2\cdot g}+z_1-\frac{u^2}{2\cdot g}-\frac{p_2}{\gamma_1}-(z_1-L_1)+\frac{32\cdot\nu_1\cdot u\cdot L_1}{g\cdot D^2}=0$$

(2) $$\Rightarrow \frac{L_2}{g}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma_2}+(z_1-L_1)-\frac{u^2}{2\cdot g}-\frac{p_3}{\gamma_2}-z_2+\frac{32\cdot\nu_2\cdot u\cdot L_2}{g\cdot D^2}=0$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\gamma_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot L_2}{g}\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+L_1\cdot(\gamma_1-\gamma_2)+\gamma_2\cdot(z_1-z_2)-p_3+\frac{32\cdot u}{g\cdot D^2}\cdot(\gamma_1\cdot\nu_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot\nu_2\cdot L_2)=0$$

$z_1 - z_2 = \Delta h_{EQ} + 2\cdot\Delta$ (0.5 Pto)

$u=\frac{\partial\Delta}{\partial t};\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}$ (0.5 Pto)

Ecuación movimiento disco:

$\sum F = m\cdot a \Rightarrow W - p_3\cdot A = \frac{W}{g}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow p_3 = \frac{W}{A}-\frac{W}{A\cdot g}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$ (0.5 Pto)

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}\cdot\left[\gamma_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot L_2+\frac{W}{A}\right]+\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot\frac{32}{D^2}\cdot(\gamma_1\cdot\nu_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot\nu_2\cdot L_2)+\gamma_2\cdot g\cdot(\Delta h_{EQ}+2\cdot\Delta)$$

$-\frac{W}{A}\cdot g + L_1\cdot(\gamma_1-\gamma_2)\cdot g = 0$ (0.5 Pto por expresión final) b)

De la parte a) se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}\cdot\left[\gamma_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot L_2+\frac{W}{A}\right]+\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot\frac{32}{D^2}\cdot\left(\gamma_1\cdot\nu_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot\nu_2\cdot L_2\right)+\gamma_2\cdot g\cdot\left(\Delta h_{EQ}+2\cdot\Delta\right)$$

$$-\frac{W}{A}\cdot g+L_1\cdot\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\cdot g=0\Leftrightarrow A\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}+B\cdot\frac{\partial\Delta}{\Delta t}+C\cdot\Delta+D=0$$

Con,

$$A=\left[\gamma_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot L_2+\frac{W}{A}\right]$$

$$B=\frac{32}{D^2}\cdot\left(\gamma_1\cdot\nu_1\cdot L_1+\gamma_2\cdot\nu_2\cdot L_2\right)$$
$$C=\gamma_2\cdot 2\cdot g$$
$$D=\gamma_2\cdot\Delta h_{EQ}\cdot g-\frac{W}{A}\cdot g+L_1\cdot\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\cdot g$$

Cambio de variables:

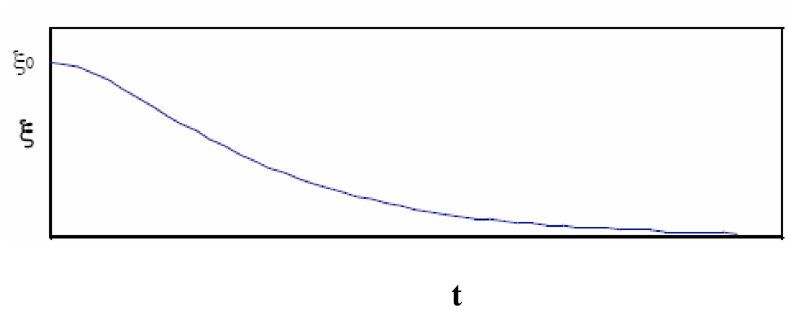
$$C\cdot\Delta+D=C\cdot y\Rightarrow y=\Delta+\frac{D}{C}$$
$$\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial\Delta}{\partial t};\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}\Rightarrow A\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+B\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+C\cdot y=0\ \text{Polinomio característico}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-B}{2\cdot A}\pm\frac{\sqrt{B^2-4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A};m=\frac{B}{2\cdot A};n=\frac{\sqrt{B^2-4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}$$

$$\Rightarrow y=\alpha\cdot e^{(-m+n)\cdot t}+\beta\cdot e^{(-m-n)\cdot t}$$
$$\Rightarrow\Delta(t)=\alpha\cdot e^{(-m+n)\cdot t}+\beta\cdot e^{(-m-n)\cdot t}-\frac{D}{C}$$

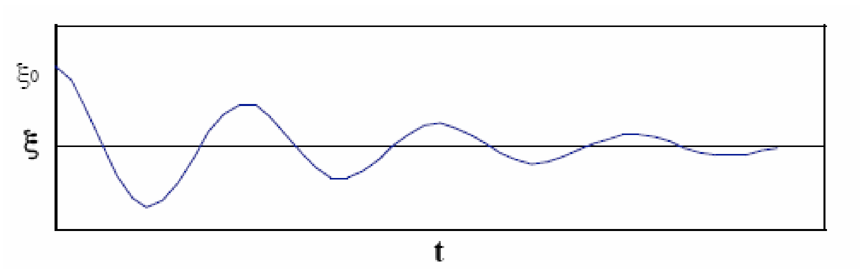
(1.0 Pto por todo este desarrollo)

- Si la fricción domina sobre la inercia: $B^2 \geq 4 \cdot A \cdot C$



(0.25 Pto)

- Si la inercia domina sobre la fricción: $B^2 \leq 4 \cdot A \cdot C$



(0.25 Pto)