

# Computación Gráfica

## Transformaciones de Proyección

Prof. María Cecilia Rivara  
mcrivara@dcc.uchile.cl  
Semestre 2006/2

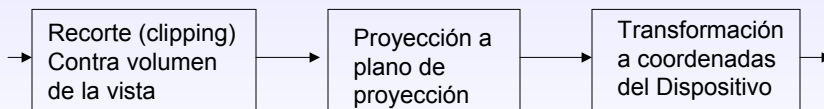
### Proceso visualización 3D



Necesitamos

- Proyecciones: transformar objetos 3D en proyecciones en plano 2D
- Volumen de la vista
- Plano de proyección (viewport en el dispositivo)

Conceptualmente



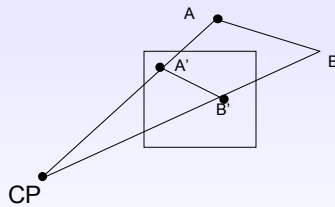
## Proyecciones Geométricas Planas

Conceptos: proyectores rectos, centro de proyección, plano de proyección

### Proyecciones

#### Perspectiva

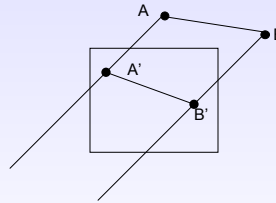
Centro de proyección a distancia finita del plano de proyección



(proyectores convergen)

#### Paralela

Centro de proyección a distancia infinita del plano de proyección



CP en el infinito  
(proyectores paralelos)

MCRivara/Comp.  
Gráfica/2006/2

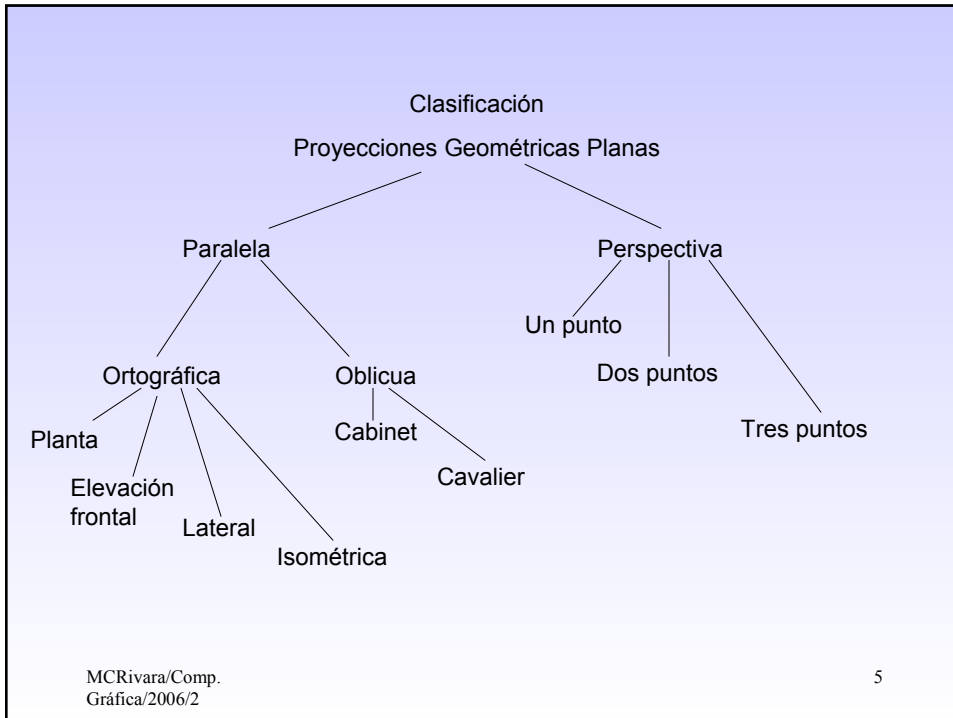
3

## Perspectiva

- En la proyección, el tamaño del objeto varía inversamente con la distancia del objeto al centro de proyección.
- Objetos parecen más realistas
- No es útil para almacenar forma y medidas exactas de los objetos. Las líneas paralelas en general no se mantienen paralelas.
- Proyecciones de líneas paralelas que no son paralelas al plano de proyección convergen en un punto de anulación (vanishing point)

MCRivara/Comp.  
Gráfica/2006/2

4



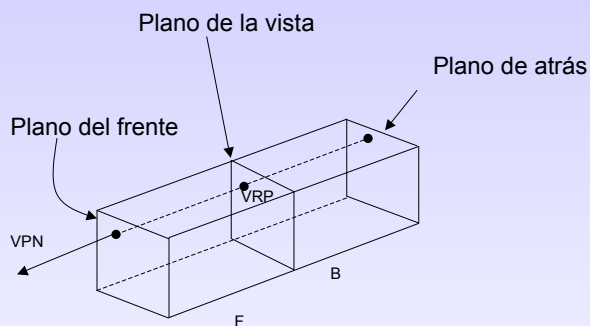
## Proyección Perspectiva

Ejes principales: ejes del sistema de coordenadas

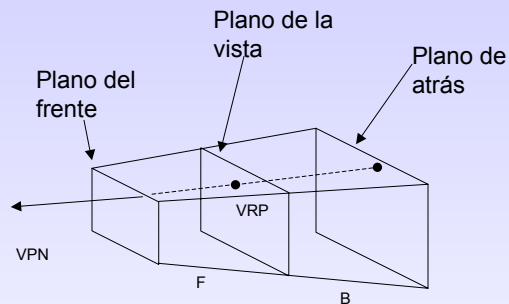
- Un punto. El plano de proyección corta un eje principal (plano de proyección paralelo a un plano del sistema de coordenadas).
- Dos puntos. Plano de proyección corta dos ejes principales.
- Tres puntos Plano de proyección corta los tres ejes principales.

## Proyección Paralela

- Ortográfica. Dirección de proyección es normal al plano de proyección
  - Planta, elevación, lateral son usadas en ingeniería Plano de proyección es perpendicular a eje principal
  - Isométrica. Normal al plano de proyección forma ángulos iguales con ejes principales. Vistas más reales
- Oblicua. Los proyectores no son normales al plano de proyección. Plano de proyección es normal a un eje principal
  - Cavalier. Proyectores forman ángulo de  $45^\circ$  con plano de proyección
  - Cabinet. Proyectores forman ángulo de  $\arctg(2) = 63.4^\circ$



Volumen de la vista truncado para proyección paralela ortográfica



Volumen de la vista truncado para proyección en perspectiva

## Plano de Proyección y Sistema de Coordenadas

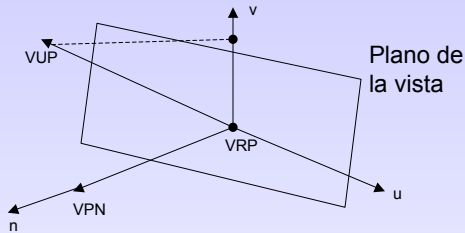
¿Cómo se definen en Computación Gráfica?

Plano de Proyección

- VRP (view reference point) Punto sobre el plano
- VPN (view plano normal) Normal al plano

VRC Sistema de coordenadas de referencia de la vista (u, v, n)

- VRP: Origen del sistema
- VPN: Un eje del sistema (n)
- VUP (view up vector): Determina el eje de dirección hacia arriba.  
La proyección de VUP sobre el plano de la vista define el eje v.



Ventana de visualización. Definida por límites ( $u_{\min}, v_{\min}$ )

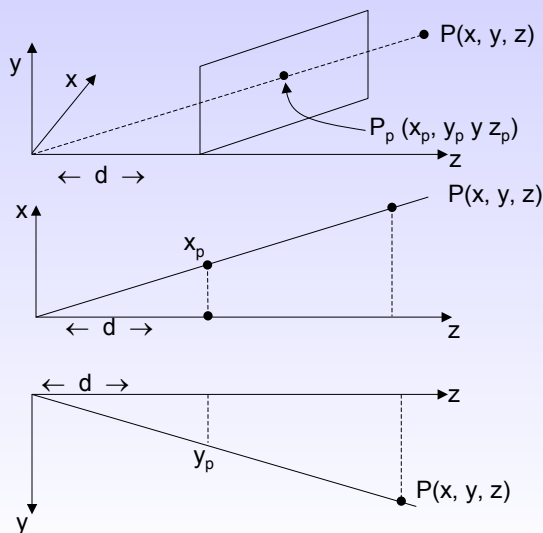
( $u_{\max}, v_{\max}$ ). No necesariamente centrada en CW (centro de la ventana)

Proyección. Se define mediante PRP (projection reference point) e indicador del tipo de proyección

- Si es perspectiva PRP es el centro de proyección
- Si es paralela, la dirección de proyección (DOP) va desde PRP a CW

## Perspectiva

Supuesto: plano de proyección  $z=d$



### Triángulos semejantes

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{z/d}$$

Matricialmente

$$M_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando  $M_{\text{per}}$  por  $P = [x \ y \ z \ 1]^T$

$$M_{\text{per}} P = [x \ y \ z \ z/d]^T \quad w = z/d \neq 1$$

Luego para recuperar el punto en  $\mathbb{R}^3$  es necesario dividir por  $w$ .

$$\text{Luego } (x_p, y_p, z_p) = \left( \frac{x}{x/d}, \frac{y}{z/d}, d \right)$$

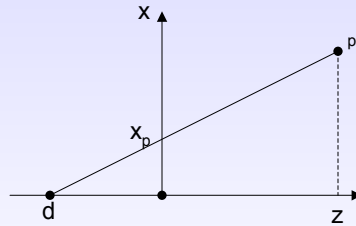
### Perspectiva (Otra deducción)

plano de proyección  $z = 0$ , centro de proyección en  $z = -d$

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d} \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}$$

$$x_p = \frac{x}{z/d+1} \quad y_p = \frac{y}{z/d+1}$$

$$M'_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$



En este caso  $d$  puede tender a infinito

### Proyección Ortográfica

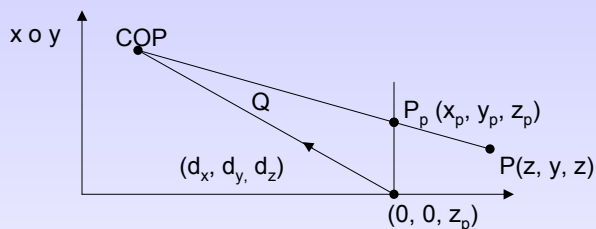
Plano de proyección en  $z = 0$

dirección de proyección  $\equiv$  normal al plano de proyección

$$M_{\text{ort}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Deducción general que integra proyecciones en paralela y perspectiva



- plano de proyección  $z = z_p$
- centro de proyección COP a distancia  $Q$  del punto  $(0, 0, z_p)$
- dirección desde  $(0, 0, z_p)$  a COP dado por vector de dirección normalizado  $(d_x, d_y, d_z)$

Ec. paramétrica línea recta de COP a P

$$P_L(t) = \text{COP} + t (p - \text{COP}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Además  $\text{COP} = (0, 0, z_p) + Q (d_x, d_y, d_z) = (d_x, d_y, z_p + Qd_z)$

Luego para  $P'$  cualquiera sobre la línea

$$x' = Qd_x + (x - Qd_x) t$$

$$y' = Qd_y + (y - Qd_y) t$$

$$z' = (z + Qd_z) + (z - (z_p + Qd_z)) t$$

$P_p$  se encuentra en la intersección de  $P_L(t)$  con plano de proyección

$z = z_p$ . Luego haciendo  $z' = z_p$  y resolviendo para  $t$

$$t = \frac{z_p - (z_p + Qd_z)}{z - (z_p + Qd_z)}$$

Luego:

$$x_p = \frac{x - z \frac{d_x}{d_z} + z_p \frac{d_x}{d_z}}{D}$$

$$y_p = \frac{y - z \frac{d_y}{d_z} + z_p \frac{d_y}{d_z}}{D}$$

$$z_p = \frac{-z \frac{z_p}{Qd_z} + z_p^2 + z_p \frac{Qd_z}{Qd_z}}{D}$$

$$\text{donde } D = \frac{z_p - z}{Qd_z} + 1$$

(se trabajó sobre identidad  $z_p = z_p$  para tener denominador D)

MCRivara/Comp.  
Gráfica/2006/2

19

$$M_{\text{general}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \left( \frac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \left( \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \right) \end{bmatrix} \quad \text{Incluye } M_{\text{per}} \quad M'_{\text{per}} \quad M_{\text{ort}}$$

	$z_p$	$Q$	$(d_x, d_y, d_z)$
$M_{\text{ort}}$	0	$\infty$	(0, 0, -1)
$M_{\text{per}}$	d	d	(0, 0, -1)
$M'_{\text{per}}$	0	d	(0, 0, -1)

MCRivara/Comp.  
Gráfica/2006/2

20

$Q \neq \infty \Rightarrow$  Proyección perspectiva de 1 pto.

Pto. de anulación: Se calcula mediante el producto

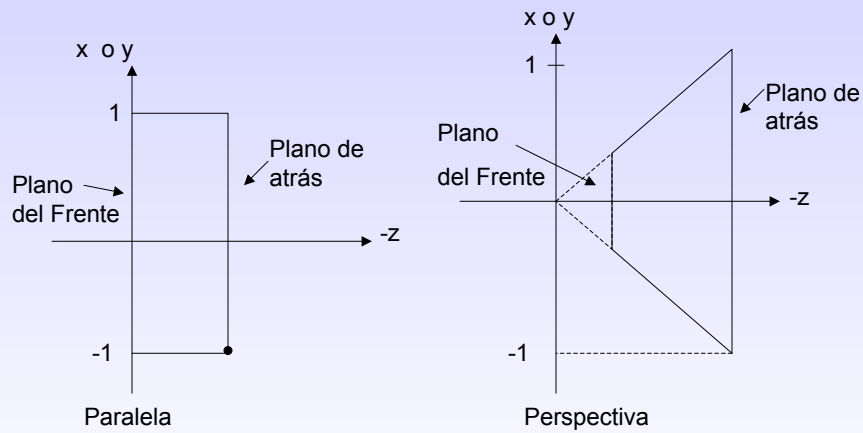
$$M_{\text{general}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y se divide por } w$$

$$\Rightarrow x = Qd_x \quad y = Qd_y \quad z = z_p$$

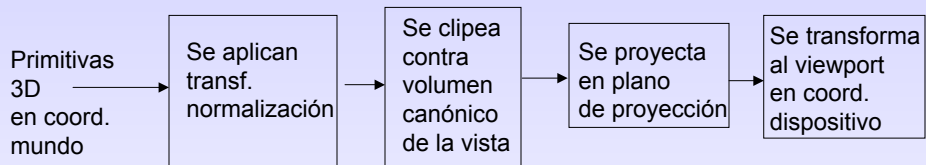
## Implementación de Proyecciones en CG

- Se utilizan volúmenes normalizados o canónicos de la vista; operaciones de clipping son más fáciles y eficientes
- Se usan transformaciones de normalización  $N_{\text{par}}$  y  $N_{\text{per}}$  que transforman volumen de la vista arbitrario (paralelo o en perspectiva) en sus respectivos volúmenes canónicos.

## Dos volúmenes canónicos de la vista



## Implementación de visualización 3D



## Proyección Paralela

Derivación de  $N_{par}$  (caso oblicuo)

Incluye transformaciones shear

1. Traslade VRP al origen
2. Rote VRC de modo que eje n (VPN) queda sobre eje z. El eje u es el eje x y el eje v el eje y.
3. Shear tal que dirección de proyección sea paralela al eje z
4. Traslade y escale al volumen de la vista en proyección paralela

## Proyección Perspectiva

Derivación del  $N_{per}$

1. Traslade VRP al origen
2. Rote VRP hasta que eje n (VPN) sea el eje z.  
El eje u es el eje x y el eje v el eje y
3. Traslade tal que centro de proyección COP esté en el origen
4. Shear tal que la línea del centro del volumen de la vista sea el eje z
5. Escale tal que el volumen de la vista sea el volumen canónico en perspectiva

## Clipping contra el volumen canónico de la vista

- Se usan extensiones “directas” de los algoritmos de clipping de Cohen-Sutherland y Cyrus-Beck en 2D
- Clipping puede hacerse en coordenadas homogéneas
  - Se puede transformar volumen canónico en perspectiva a volumen canónico de proyección paralela. Se maneja así clipping optimizado.  
Para asegurar resultados correctos debe hacerse en coordenadas homogéneas.
  - Transformaciones poco frecuentes y uso de splines racionales pueden tener  $w < 0$ . Para obtener resultados correctos se necesitan coord. Homogéneas.