

AS31B: Astrofísica de ★s - Tarea 4

Inicio: Viernes 3 de Noviembre

Entrega: Miércoles 22 de Noviembre, en el Exámen

1. Modelos estelares. Para este problema, puede ser útil repasar lo visto en el problema #3 de la Tarea # 3. Usaremos nuevamente StatStar para calcular algunas propiedades de los interiores estelares. Este problema está basado en los problemas 10.19 y 10.20 de Ostlie & Carroll. Usar el código de mi sitio ftp.

Usando el diagrama masa-temperatura efectiva y el diagrama H-R teórico que se muestra en la Figura 1, calcularemos varias propiedades de modelos en la secuencia principal para estrellas homogéneas de masas 0.7, 3.0 y 10.0 M_{\odot} .

- (a) Luego de obtener convergencia de los modelos para las tres masas indicadas arriba, grafique $P(r)$, M_r , L_r y $T(r)$. vs. r ,
- (b) ¿A qué temperatura L_r alcanza el 50% y el 99% de su valor en la superficie? Compare la temperatura Cuántica, $T_{\text{Cuántica}}$, calculada en clase, al radio en el que L_r alcanza el 50% de su valor máximo, ¿cómo comparan éstos valores?
- (c) Calcule M_r/M_* (M_* =masa total de la estrella modelo) para las temperaturas calculadas en la pregunta anterior,
- (d) Para cada una de las masas de los modelos propuestos, compare los cambios en:
(a) temperatura central, (b) densidad central, (c) tasa de generación de energía en el núcleo, (d) el tamaño de la zona convectiva como función de fracción de masa y radio, (e) la temperatura efectiva, y (f) la luminosidad.
- (e) Para cada una de las masas de los modelos propuestos, grafique lo siguiente (superponga las tres masas en el mismo gráfico):
 - L_r/L_{\odot} vs. M_r/M_{\odot}
 - $\log(L_r/L_{\odot})$ vs. $\log(M_r/M_{\odot})$
 - Asumiendo una ley de potencias del tipo $L_r/L_{\odot} = (M_r/M_{\odot})^{\alpha}$, calcule el exponente α usando la Figura 2. Esto es lo que se conoce como la relación masa-luminosidad de estrellas de la secuencia media.
 - Compare los valores predichos por la relación anterior, con aquellos derivados de sus modelos para las tres masas indicadas.

2. La aproximación en ley de potencias (ver clases de cátedra) de la tasa de generación de energía a través de las cadenas PP y CNO está dada por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{PP} &= 1.06 \times 10^{-5} \rho X^2 T_6^{\eta_{PP}} \text{ [ergs g}^{-1} \text{ s}^{-1}] \\ \epsilon_{CNO} &= 8.24 \times 10^{-24} \rho X X_{CNO} T_6^{\eta_{CNO}} \text{ [ergs g}^{-1} \text{ s}^{-1}]\end{aligned}$$

donde $X \sim 0.7$ y $X_{CNO} \sim 0.02$ son las fracciones por masa de H y los reactantes CNO respectivamente, y $T_6 = T \text{ [K]}/10^6$.

- (a) Usando las expresiones de más arriba, **calcule** la temperatura a la cual las tasas de generación vía PP y CNO se igualan (use los valores aproximados de los exponentes η_{PP} y η_{CNO} vistos en Clase),
- (b) Usando 2(a), encuentre una expresión **aproximada** para la temperatura central T_c de un conjunto de modelos estelares de densidad constante $\langle \rho \rangle$, sin presión de radiación, asumiendo gas ideal y composición química homogénea, y muestre que ésta T_c aumenta con la masa total del modelo estelar (no calcule nada, déjelo expresado en términos de M y $\langle \rho \rangle$),
- (c) En base a los puntos a) y b), **explique** porqué uno esperaría que la cadena PP es más importante para estrellas de secuencia principal de baja masa, mientras que la cadena CNO es más importante para estrellas de alta masa. Sabiendo que $T_{6\odot} \sim 15.8$, ¿a qué masa aproximadamente esperaría la transición de PP a CNO en términos de M_\odot ?

3. “Teoremas integrales de Interiores Estelares”

- (a) En interiores estelares es conveniente definir la densidad de masa promedio al radio r , $\bar{\rho}(r)$, por:

$$\bar{\rho}(r) = \frac{M_r}{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)} \quad (1)$$

donde M_r es la masa interior al radio r . Esto implica que podemos expresar r como:

$$r = \left(\frac{3M_r}{4\pi\bar{\rho}(r)} \right)^{1/3} \quad (2)$$

Demuestre que $\bar{\rho}(r) \geq \bar{\rho} \forall 0 \leq r \leq R$, donde $\bar{\rho}$ es la densidad promedio global de la estrella y R su radio.

Hint: Considere que $d\rho/dr \leq 0$ desde un valor central máximo $\rho(r=0) = \rho_c$, y evalúe explícitamente la razón $\bar{\rho}(r)/\bar{\rho}$ para $r = R$ y para $r \rightarrow 0$.

- (b) Usando la definición anterior para $\bar{\rho}(r)$, y las ecuaciones de equilibrio histrostático y conservación (o continuidad) de masa, **demuestre** que la presión central de la estrella, P_c , está dada por:

$$P_c = \frac{G}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{4/3} \int_0^M \bar{\rho}(r)^{4/3} M_r^{-1/3} dM_r \quad (3)$$

Explicite las condiciones de borde supuestas en la integración anterior.

- (c) Considerando la cota inferior de $\bar{\rho}(r)$ (ver parte (3a)) **demuestre** que se satisface:

$$P_c \geq \frac{3G}{8\pi} \cdot \frac{M^2}{R^4} \quad (4)$$

- (d) Considerando la cota superior de $\bar{\rho}(r)$ (ver parte (3a)) **demuestre** que se satisface:

$$P_c \leq \frac{3G}{8\pi} \cdot \frac{M^2}{R^4} \cdot \left(\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right)^{4/3} \quad (5)$$

4. En este problema Ud. calculará la luminosidad máxima de una estrella, antes de ser 'evaporada' por la presión de su propia radiación, lo que se conoce como *límite (o luminosidad) de Eddington*. Considere una atmósfera estelar puramente radiativa, es decir, en la cual no existe transporte convectivo (o es despreciable frente al transporte radiativo).

- (a) A partir de la ecuación de transferencia radiativa y de la ecuación de equilibrio hidrostático, **demuestre** que la luminosidad interior L_r satisface la siguiente relación:

$$L_r = 4\pi G \frac{4ac}{3\kappa} T^3 M_r \frac{dT}{dP} \quad (6)$$

- (b) Ahora introduzca la definición $\beta = \frac{P_g}{P_g + P_r}$ donde P_g es la presión de los gases y P_r es la presión de la radiación. **Demuestre** que, para un cuerpo negro con $P_r = \frac{1}{3} a T^4$ y $\beta = \text{constante}$ (lo que se conoce como la aproximación de Eddington en este problema), se cumple que:

$$1 - \beta = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dP} \quad (7)$$

- (c) Finalmente, usando las expresiones anteriores, **demuestre** que la luminosidad máxima de una estrella, cuando toda la presión es proporcionada por la radiación, está dada por la *Luminosidad de Eddington*:

$$L_{r_{Edd}} = 4\pi \frac{Gc}{\kappa} M_r \quad (8)$$

5. Y, por supuesto, polítropos...

- (a) Hay solamente tres polítropos para los cuales la solución de la ecuación de Lane-Emden es analítica, ellos tienen $n = 0$ (caso de una esfera de gas homogénea), $n = 1$, y $n = 5$. Calcule $\phi(\xi)$ en estos tres casos.
- (b) Demuestre que el radio del polítopo con índice $n = 5$ es infinito, y por tanto no puede corresponder a una solución física para una estrella real.
- (c) Como se vió en clases, para un gas ideal monoatómico sometido a procesos adiabáticos (e.g., convección), la ecuación de estado (EOS) es:

$$P = K \rho^{5/3} \quad (9)$$

lo que equivale a un polítopo con $n = 3/2$. También hemos visto que el Sol es convectivo sólo en sus zonas más externas, entre $0.7 \leq r/R_{\odot} \leq 1.0$. El resto del Sol está estratificado en una 'adiabática inferior' que se puede representar con un exponente de $4/3$ en la expresión anterior (o, lo que es lo mismo, como un polítopo con $n = 3$). A partir de la solución numérica para la ecuación de Lane-Emden con $n = 3$ tenemos que $\xi_1 = 6.90$, $(d\phi/d\xi)_{\xi=\xi_1} = -0.0424$. Con estos datos, calcule **para el Sol**, los valores de: La escala de altura del polítopo, a (definida en clases), la densidad central, la densidad media, la presión central, la temperatura central y la constante K , todo en unidades cgs. Compare estos valores con los de los modelos más precisos mencionados en clases.

Dirija sus comentarios o dudas a Felipe Olivares
(e-mail: folivare@das.uchile.cl, tel. 977 1090)

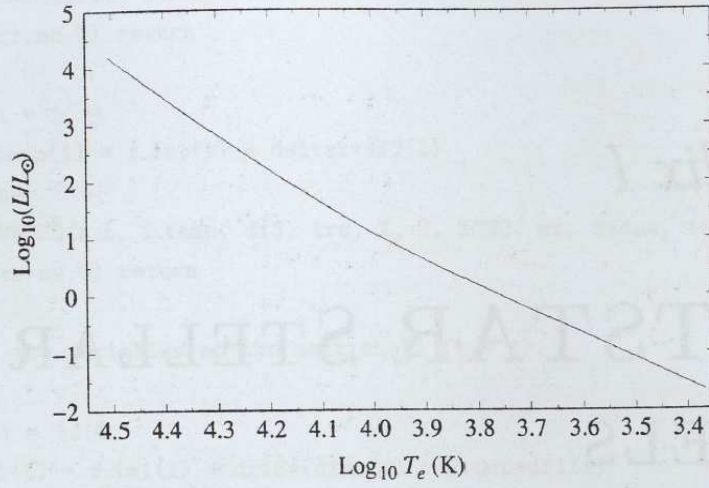


Figure I.1 The STATSTAR main sequence for $X = 0.7$, $Y = 0.292$, and $Z = 0.008$.

M/M_{\odot}	$T_e(K)$	M/M_{\odot}	$T_e(K)$	M/M_{\odot}	$T_e(K)$	M/M_{\odot}	$T_e(K)$
0.50	2321.4	2.25	12260.0	4.75	19730.0	9.00	27061.2
0.60	2910.8	2.50	13240.0	5.00	20302.0	9.50	27712.0
0.70	3523.0	2.75	14170.8	5.50	21354.0	10.00	28263.6
0.80	4163.3	3.00	15007.3	6.00	22310.0	10.50	28845.2
0.90	4832.8	3.25	15790.8	6.50	23217.0	11.00	29414.6
1.00	5500.2	3.50	16525.0	7.00	24074.0	11.50	29964.8
1.25	7203.6	3.75	17252.0	7.50	24880.0	12.00	30496.5
1.50	8726.4	4.00	17904.0	8.00	25613.6	12.50	31009.0
1.75	10090.0	4.25	18546.8	8.50	26332.0	13.00	31493.0
2.00	11218.4	4.50	19153.6				

Table I.1 The Variation of Effective Temperature with Mass Along the STATSTAR Main Sequence, Assuming $X = 0.7$, $Y = 0.292$, and $Z = 0.008$.

Figure 1: La secuencia principal de StatStar para una composición química de $X=0.7$, $Y=0.292$ y $Z = 0.008$.

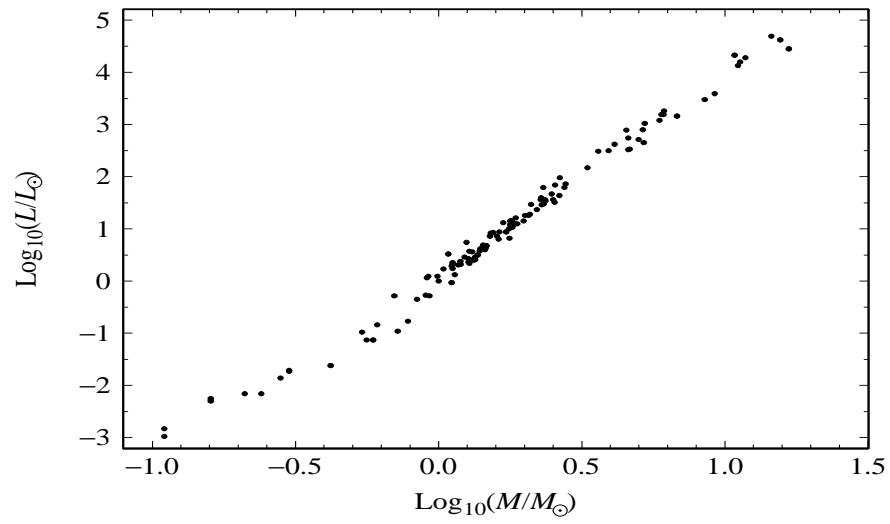


Figure 2: Relación masa-luminosidad observada de estrellas de secuencia principal.