

### Tarea 3 Medida, 2da parte

#### Problema I

Sean  $p, q \in [1, \infty]$  conjugados y  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ .

- (0,5) Pruebe que la convolución  $f * g$  está definida *para todo*  $x \in \mathbb{R}^d$ , y que es una función acotada y uniformemente continua.
- (0,5) Suponga ahora que  $1 < p, q < \infty$  (conjugados). Aproximando apropiadamente  $f$  y  $g$ , muestre que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$ .

En las preguntas **II** y **III** se usará la siguiente notación:

- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  es el conjunto de medidas (positivas) finitas definidas en los borelianos de  $\mathbb{R}^d$ .
- $C_b$  es el espacio de funciones  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continuas acotadas y  $C_0$  el subespacio de funciones continuas a soporte compacto. En ambos espacios  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma uniforme.
- La integral de  $f$  con respecto a  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  se denota  $\langle m, f \rangle$ .
- Para  $x \in \mathbb{R}^d$  denotaremos por  $\delta_x$  la masa de Dirac en  $x$ , es decir, la medida definida por  $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$  para todo boreliano  $A$ .

#### Pregunta II

Diremos que una sucesión  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  converge *estrechamente* a  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  si

$$\langle m_n, f \rangle \rightarrow \langle m, f \rangle \quad \forall f \in C_b \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y lo denotamos

$$m_n \Rightarrow m.$$

- (0,4) Sean  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ . Muestre que  $\mu = \nu$  ssi  $\langle \mu, f \rangle = \langle \nu, f \rangle$  para toda  $f \in C_b$ .
- (0,2) Para cada  $\sigma > 0$ , sea  $g_\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  la densidad (de probabilidad) Gaussiana

$$g_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{d}{2}} \exp\{-|x|^2/2\sigma^2\}$$

Sea  $\sigma_n > 0$  una sucesión convergente a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\mu_n$  la medida (absolutamente continua c/r a la medida de Lebesgue) con densidad  $g_{\sigma_n}$ .

Muestre que  $\mu_n \Rightarrow \delta_0$

- (0,4) Sean  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1$  y  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  una sucesión de medidas de probabilidad tal que  $m_n \Rightarrow \delta_0$ . Pruebe que  $m_n * m \Rightarrow m$  y que  $g * m_n \rightarrow g$  en  $L^1$ .
- (0,4) Se define la *función característica* de  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  como

$$\hat{m}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x \cdot \xi)} dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

que es una función acotada uniformemente continua (No se pide probarlo). Pruebe que para todo  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  y  $\sigma > 0$  se tiene

$$g_\sigma * m(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{m}(\xi) e^{-\{\sigma^2|\xi|^2/2\}} e^{-i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

(Recuerde que  $\int_{\mathbb{R}^d} g_1(y) e^{i(y \cdot \xi)} dy = \exp(-|\xi|^2/2)$ .)

- e) (0,6) Pruebe el **Teorema de inversión para medidas**: Si  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  son tales que  $\mu(\hat{\nu}(\xi)) = \hat{\nu}(\xi)$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $\mu = \nu$ .

### Pregunta III

Diremos que una sucesión  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  converge *vagamente* a  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  si

$$\langle m_n, f \rangle \rightarrow \langle m, f \rangle \quad \forall f \in C_0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y lo denotamos

$$m_n \longrightarrow m.$$

a) *Convergencia vaga y convergencia estrecha*

- i) (0,4) Sea  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  una sucesión vagamente convergente a  $m$  y tal que  $m_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow m(\mathbb{R}^d)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Muestre que para toda  $f \in C_b$  y  $h \in C_0$  tal que  $0 \leq h \leq 1$  se tiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\langle m_n, f \rangle - \langle m, f \rangle| \leq 2\|f\|_\infty [m(\mathbb{R}^d) - \langle m, h \rangle].$$

- ii) (0,4) Deduzca que  $m_n \implies m$  ssi  $m_n \longrightarrow m$  y  $m_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow m(\mathbb{R}^d)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

b) Suponga que  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  es una sucesión que satisface la condición

$$(\mathbf{U}) : \quad \sup_n m_n(\mathbb{R}^d) < \infty$$

Se probará que  $(m_n)$  tiene una subsucesión vagamente convergente.

- i) (0,4) Sea  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  un subconjunto denso numerable de  $C_0$ . (No se pide probar su existencia). Muestre que existe una subsucesión  $m'_n$  de  $m_n$  tal que para cada  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\langle m_n, f_p \rangle$  converge cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- ii) (0,6) Pruebe que para  $f \in C_0$  y  $k, j, p \in \mathbb{N}$  se tiene

$$|\langle m'_k, f \rangle - \langle m'_j, f \rangle| \leq 2 \sup_n m_n(\mathbb{R}^d) \|f - f_p\|_\infty + |\langle m'_k, f_p \rangle - \langle m'_j, f_p \rangle|,$$

y deduzca que para todo  $f \in C_0$ ,  $\langle m'_k, f \rangle$  converge a un límite  $L(f)$ . Concluya mostrando que existe una medida  $m$ , **finita**, tal que  $L(f) = \langle m, f \rangle$  para todo  $f \in C_0$ .

- iii) (0,4) Usando masas de Dirac, muestre que existe una sucesión de medidas de probabilidad  $(m_n)$  vagamente convergente a un límite  $m$ , que es tal que  $m(\mathbb{R}^d) \neq 1$ . Deduzca que la condición **(U)** no garantiza la existencia una subsucesión de convergente estrechamente.

c) *Condición de tensión*: Diremos que una familia  $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  es **tensa** si satisface la condición

$$(\mathbf{T}) : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \text{ compacto de } \mathbb{R}^d \text{ tal que } \sup_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

- i) (0,2) Muestre que toda familia finita es tensa, y que la unión finita de familias tensas es tensa.

- ii) (0,6) Suponga que  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  es una sucesión que satisface la condición **(U)** y la condición de tensión **(T)**. Pruebe que  $(m_n)$  tiene una subsucesión convergente estrechamente.

**Nota** Sean  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  espacios de probabilidad (que pueden ser todos diferentes) y  $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  variables aleatorias. Se dice que la sucesión  $(X_n)$  **converge en ley** si la sucesión de medidas de probabilidad  $(m_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  definida por  $m_n = \text{ley}(X_n)$  converge estrechamente.