MA37A Optimización
Análisis Post-optimal

Profesor: Jaime González
Auxiliar: Oscar Peredo

1 de mayo de 2006

Una vez resuelto un problema en forma estandar $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ se puede analizar que ocurre con la solución si varían ciertos parámetros del problema.
En todos los casos se asume que el cuadro óptimo es de la forma:

0	$\overline{c}_N^t$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

1. Variación en coeficientes de función objetivo: c

Si $c \Rightarrow \tilde{c}$, se debe recalcular $\overline{c}_N^t$:

$$\overline{\tilde{c}}_N^t = \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N$$

- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t \geq 0$: La base óptima no cambia. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1} b$.
- Si $\overline{\tilde{c}}_N^t$ tiene una componente negativa: Iterar con simplex.

2. Variación en lado derecho: b

Si $b \Rightarrow \tilde{b}$, se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La solución es óptima aún. La función objetivo toma el valor $c_B^t B^{-1} \tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene una componente negativa: Iterar con simple x-dual.

3. Introducción de nueva variable

Se introduce la variable x_{n+1}, con coeficiente c_{n+1} y columna $A_{\cdot,n+1}$. El costo reducido de esa variable será:

$$\overline{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$$

El cuadro asociado será:

0	$\overline{c}_N^t$	$c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot,n+1}$	$-z$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1} A_{\cdot,n+1}$	$B^{-1}b$

- Si $\overline{c}_{n+1} < 0$:
  - Si $B^{-1} A_{\cdot,n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $B^{-1} A_{\cdot,n+1}$ tiene alguna componente mayor a cero: Iterar con simplex.
- Si $\overline{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima.

4. Introducción de nueva restricción

Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\left\{(c^t, 0) \cdot (x, x_{n+1}) : \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}\right\}$$

Se agrega x_{n+1} a la base:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego, los costos reducidos y la función objetivo no cambian. Cambia $\tilde{B}^{-1}b$ y $\tilde{B}^{-1}N$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}N &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1} N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$