

1. Se hizo un estudio con 41 probetas de una nueva aleación de acero y 33 probetas de Acero 4041 probando su resistencia. Suponga que X e Y son v.a que representan las respectivas resistencias y siguen las siguientes distribuciones: $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivamente. Se observó en el estudio que la media de las respectivas resistencias son:

$$\bar{x} = 247 \text{ MPa y } \bar{y} = 246,9 \text{ MPa y las varianzas son } S_1^2 = 3,7 \text{ MPa}^2 \text{ y } S_2^2 = 2,9 \text{ MPa}^2.$$

- a) ¿ Las desviaciones estándar de cada material son significativamente distintas?, planteé el test para responder a la pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de equivocarse en su planteamiento? ¿Qué material elegiría?
- b) Usted quiere decidir que material ocupar, la nueva aleación o un acero normal, en el acero normal la resistencia promedio es de 246.5 MPa pero es más económico. ¿ La resistencia del acero es significativamente diferente a la de la nueva aleación? ¿Qué material elegiría? Decida mediante el p-valor.
- c) Sea otro material al que se le realizaron 12 ensayos y sea Z la v.a que representa su resistencia y $Z \rightarrow N(\mu_3, \sigma_3^2)$ con $\sigma_3^2 = 9$. De la región crítica más potente para las Hipótesis:
 $H_0 : \mu_3 = 247$ y $H_1 : \mu_3 = 247,5$ Concluya.

Solución

a)

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ Como se conocen los estimadores, se puede establecer una desigualdad, la hipótesis alternativa queda de la forma:

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

Cuando se quiere comparar dos varianzas o desviaciones estándar en dos poblaciones, se debe formar la distribución de Fisher para calcular la región crítica o el p-valor.

1) REGION DE RECHAZO

Está dada por la $P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ verdadero})$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right) &= \alpha \\ &= P\left(\frac{n_1 S_1^2 (n_2 - 1) \sigma_2^2}{\sigma_1^2 (n_1 - 1) n_2 S_2^2} > \frac{C \cdot n_1 (n_2 - 1) \sigma_2^2}{\sigma_1^2 (n_1 - 1) n_2} / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right) = 0,05 \\ &= P\left(\frac{n_1 S_1^2 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2 S_2^2} > \frac{C \cdot n_1 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2}\right) = 0,05 \\ &= P(F_{40,32} > F) = 0,05 \end{aligned}$$

De la tabla $F = 1,77 = \left(\frac{C \cdot n_1 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2}\right) = \frac{C \cdot 41 \cdot 32}{40 \cdot 33} = 0,9939 \cdot C$, despejando C, se obtiene $C = 1,78$ Finalmente la región de rechazo queda dada por $W = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 1,78\right)$, como $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1,276$ entonces no pertenece a la región de rechazo, luego se acepta H_0

2) P-VALOR

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right) &= \alpha \\
= P\left(\frac{n_1 S_1^2 (n_2 - 1) \sigma_2^2}{\sigma_1^2 (n_1 - 1) n_2 S_2^2} > \frac{C \cdot n_1 (n_2 - 1) \sigma_2^2}{\sigma_1^2 (n_1 - 1) n_2} / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right) \\
= P\left(\frac{n_1 S_1^2 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2 S_2^2} > \frac{C \cdot n_1 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2}\right) &= P(F_{n_1-1, n_2-1} > F)
\end{aligned}$$

Al calcular el p-valor, lo que se está haciendo es calcular el error de tipo I, es decir, la $P(\text{rechazar } H_0/H_0 \text{ cierto})$, para poder calcular el p-valor, se calcula una aproximación del estadístico que se construyó con la información del enunciado, luego se tendrá:

$$\hat{F} = \frac{n_1 S_1^2 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) n_2 S_2^2} = \frac{41 \cdot 32 \cdot 3,7}{40 \cdot 33 \cdot 2,9} = 1,1229$$

Pero en $P(F_{40,32} > F) = 0,05$ $F=1.77$ y $P(F_{40,32} > F) = 0,01$ $F=2.25$, se tiene que mientras disminuye el error de equivocarnos F aumenta. El F que nos dio el P-valor es menor que 1.77, por lo tanto no se puede rechazar H_0 .

Respuesta:

- La probabilidad de equivocarse en la decisión está dada por α , en éste caso el error que se comete al decidir es de un 5 %
- No se puede elegir que material ocupar pues también es relevante si las medias son significativamente diferente, para ésto hay que construir otro test que compare las dos medias, en caso de que éste test arroje que las medias son iguales , da lo mismo que material ocupar.

Si dice que el otro test que se debe formar es una t-student \Rightarrow 0,3 de BONUS en la pregunta

b)

Planteamiento de las hipótesis alternativas:

$$H_0 : \mu_1 = 246,5$$

$$H_1 : \mu_1 \neq 246,5$$

Solución por el p-valor.

$$p - \text{valor} = \alpha = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ verdadero})$$

$$P \{ \bar{x} < c_1 / \mu_1 = 246,5 \} = P \{ \bar{x} > c_2 / \mu_1 = 246,5 \}$$

como no se tiene conocimiento de la desviación estándar se debe formar una t-student, resolviendo el segundo término se tiene:

$$P \left\{ \frac{(\bar{x} - \mu_1) \sqrt{n-1}}{S_x} > \frac{(c_2 - \mu_1) \sqrt{n-1}}{S_x} / \mu_1 = 246,5 \right\}$$

$P \{ t_{n-1} > t \} = \frac{\alpha}{2}$, en este caso debemos estimar t_{n-1} , entonces tenemos un estimador de la forma:

$$\hat{t} = \frac{(\bar{x} - \mu_1) \sqrt{n-1}}{S_x} = \frac{(247 - 246,5) \sqrt{40}}{\sqrt{3,7}} = 1,644$$

Calculamos la función Probabilidad de y $P(t_{n-1} > \hat{t}) = P(t_{40} > 1,644) > 0,05 > 0,025 \Rightarrow \text{Aceptamos } H_0$

Resp: No, la resistencia del acero no es significativamente distinta a la resistencia de la nueva aleación. Elegiría el acero, pues como las resistencias no son significativamente distintas puedo utilizar el acero o la aleación, pero el acero es más económico.

c)

$$H_0 : \mu_3 = 247 \quad H_1 : \mu_3 = 247,5$$

La región crítica está dada por:

$W : \bar{z} > C$ Y c, está determinado por:

$$P(\bar{z} > C / \mu_3 = 247) = 0,05 \text{ Como } \bar{z} \rightarrow N(\mu_3, 9) \Rightarrow \frac{(\bar{z} - 247)\sqrt{n}}{3} \rightarrow N(0, 1).$$

$$P \left(\frac{(\bar{z} - 247)\sqrt{n}}{3} > \frac{(C - 247)\sqrt{n}}{3} \right) = 0,05 \Rightarrow \frac{(C - 247)\sqrt{12}}{3} = 1,65$$

Se despeja c, y da $C=248.4289$

Respuesta: Luego la región crítica está dada por $W = \{ (z_1 \dots z_n) \in R / \bar{Z} > 248,4289 \}$