

### Test de Hipótesis

Para realizar un test de hipótesis necesitamos definir una hipótesis nula o de trabajo y una hipótesis alternativa, que será la hipótesis que se enfrentará a nuestra hipótesis nula.

La hipótesis nula se define como  $H_0$  y la hipótesis alternativa como  $H_1$ .

Luego de definir las hipótesis, se debe establecer una regla de decisión, ésta debe intentar disminuir los errores que se puedan cometer en la decisión, en general se utiliza el error del tipo I, denotado por :

$\alpha$  = Error de tipo I = Probabilidad (Rechazar  $H_0$  /  $H_0$  es cierto)

Para decidir hay dos alternativas:

- calcular la región de rechazo de  $H_0$ ,  $W$  y ver si el estimador del parámetro está en esa región. Si el estimador del parámetro pertenece a la región de rechazo, se rechaza  $H_0$ , y se acepta  $H_1$ .
- calcular el valor de  $\alpha$ , también llamado p-valor, el p-valor en general como máximo es 5%, luego si el p valor encontrado es menor ó igual que 0,05, se rechaza  $H_0$ , si es mayor se acepta  $H_0$

Ejemplo 1:

Se hicieron pruebas de resistencia a la fluencia a 333 probetas de Aluminio 6061.

Suponga que  $X$  es la variable aleatoria que representa la resistencia a la fluencia de cada probeta y que sigue una distribución normal  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ . En las muestras se observó una media y varianza de:

$\bar{X}=200.12$  y  $S_1^2=1.2$ .

1. Si se le aplica un tratamiento térmico la resistencia a la fluencia será de 200 Mpa con una desviación estandar de 2.35 Mpa. ¿ La resistencia a la fluencia cambiará significativamente con el tratamiento térmico? ¿Cuál es la probabilidad de que se equivoque en su respuesta?

Desarrollo:

Como no tenemos conocimiento de la media de la resistencia de las probetas de Al sin tratamiento térmico, el test queda de la forma:

$H_0: \mu_1 = \mu_{tt} = 200$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_{tt}$

- Solución por región de rechazo:

La región de rechazo se define como

$$W = \{\bar{x} < c_1\} \cup \{\bar{y} > c_2\}$$

---

sabemos que  $X \longrightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , como no conocemos  $\sigma_1^2$ , sino que sólo su estimador, debemos construir una t-student.

Se tiene:

$$P\{\bar{x} < c_1/\mu_1 = 200\} = P\{\bar{x} > c_2/\mu_1 = 200\} = 0.025$$

resolviendo el segundo término se tiene:

$$P\left\{\frac{(\bar{x} - \mu_1)\sqrt{n-1}}{S_x} > \frac{(c_2 - \mu_1)\sqrt{n-1}}{S_x}/\mu_1 = 200\right\} = 0.025$$

$$P\left\{t_{n-1} > \frac{(c_2 - 200)\sqrt{n-1}}{S_x}\right\} = 0.025$$

Para una  $P\{t_{n-1} > t\} = 0.025$ ,  $t = 1,96$

$$\Rightarrow \frac{(c_2 - 200)\sqrt{332}}{\sqrt{1.2}} = 1.96$$

despejando la ecuación se obtiene  $c_2$ , análogamente para  $c_1$ .

$$P\left\{t_{n-1} < \frac{(c_1 - 200)\sqrt{n-1}}{S_x}\right\} = 0.025 \Rightarrow P\{t_{n-1} < t\} = 0.025$$

estos se cumple para  $t = -1,96$ , luego se despeja  $c_1$ .

Finalmente la región de rechazo está dada por:

$$\Rightarrow W = \{\bar{x} < 199.8821\} \cup \{\bar{x} > 200.1178\}$$

Como la media obtenida es 200.12,  $\bar{x} \in W \Rightarrow$  Rechazamos  $H_0$ , con una probabilidad de un 5% de equivocarnos.

- Solución por cálculo del p-valor:

$$P\{\bar{x} < c_1/\mu_1 = 200\} = P\{\bar{x} > c_2/\mu_1 = 200\} = \frac{\alpha}{2}$$

construimos una t-student, luego las ecuaciones quedan:

$P\{t_{n-1} > t\} = \frac{\alpha}{2}$ , en este caso debemos estimar  $t_{n-1}$ , entonces tenemos un estimador de la forma:

$$\hat{t} = \frac{(\bar{x} - \mu_1)\sqrt{n-1}}{S_x} = \frac{(200.12 - 200)\sqrt{332}}{\sqrt{1.2}} = 1.9959$$

Calculamos la función Probabilidad de y  $P(t_{n-1} > \hat{t}) = P(t_{332} > 1.99) = 0.0115 < 0.05 \Rightarrow$  Rechazamos  $H_0$

El otro caso se resuelve de forma análoga.

### **Resumen:**

a) Probar si  $H_0 : \mu = cte$

- 
- si  $\sigma$  es conocido, utilizo una Normal
  - si  $\sigma$  es desconocido, utilizo una t-student de n-1 grados de libertad.

b) Probar si  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ .

- Si  $\sigma$  es conocido, utilizo una Normal
- Si  $\sigma$  es desconocido utilizo una t-student, de n+m-2 grados de libertad. Utilice el supuesto  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = K$  en general K=1, depende del enunciado.

c) Probar si  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  Se utiliza una chi-cuadrado

d) Probar si  $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ . Se utiliza una F-Fisher

Un test será uniformemente más potente, cuando la región crítica a construir, no depende de la hipótesis nula. Por ejemplo:

Sea  $X_1 \dots X_n$  una m.a.s que sigue una  $N(\mu, \sigma^2)$ . Al realizar un test con Hipótesis alternativa  $H_1 : \mu < \mu_0$  el test U.M.P está dado por  $R = (x_1 \dots x_n) : \bar{x} < C$  INDEPENDIENTE de cual sea la Hipótesis nula.

### **Ejercicio 1:**

Sea  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2 = 1/4$  y una muestra de tamaño n=36. Se construye un test para la hipótesis nula  $H_0 : \mu = 20$  contra la Hipotesis alternativa  $H_1 : \mu = 18$

- De la región crítica del test más potente para un error  $\alpha = 0.001$  de tipo I
- Calcule el error tipo II del test
- Para un n= 49 determine el valor de  $\alpha$  que permita obtener la misma región crítica que la primera parte y deduzca el error de tipo II
- Si n=49 y  $\alpha = 0.001$ , determine el valor de  $\mu$  de la hipótesis alternativa que produce el mismo error de tipo II que en la segunda parte.