

MA34B - Ejercicios Control 2

Guía N°1 (Soluciones P4,P5 y P6)

20 de mayo de 2006

Profesor cátedra: Rodrigo Abt B.
Auxiliar: Julio Deride

P4:

1. Un estimador insesgado para la proporción p de cuentas es $\hat{p} = \bar{X}$. En efecto, ya que $E(\bar{X}) = p$. Entonces, necesitamos encontrar a y b tales que:

$$Pr(a \leq p \leq b) = 0,96$$

Tenemos $\bar{x} = 17/40 = 0,425$. Usando una aproximación a la Normal:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Luego, sabemos que un intervalo de confianza para una proporción p es:

$$IC_p = \left[\hat{p} - U \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + U \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Solo resta encontrar el valor de U para un nivel de confianza del 96 %, lo que se traduce en una cola de $(1 - 0,96)/2$, cuyo valor en tabla es de 2,05 aproximadamente. Entonces:

$$IC_p = \left[0,425 - 2,05 \sqrt{\frac{0,425 \cdot 0,575}{40}}; 0,425 + 2,05 \sqrt{\frac{0,425 \cdot 0,575}{40}} \right] = [0,265; 0,585]$$

2. Necesitamos conocer el tamaño de muestra requerido para tener una diferencia de 0,02 entre p y \hat{p} con el mismo nivel de confianza de la parte anterior, esto es:

$$Pr(|\hat{p} - p| \leq 0,02) = 0,96 \Leftrightarrow Pr(-0,02 \leq \hat{p} - p \leq 0,02) = 0,96$$

Que corresponde a parte del desarrollo del intervalo de confianza. Luego:

$$Pr(-0,02 \leq \hat{p} - p \leq 0,02) = Pr\left(\frac{-0,02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{0,02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,96$$

De aquí se debe cumplir que:

$$\frac{0,02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = U = 2,05$$

Lo cual al despejar nos deja:

$$n = \frac{2,05^2 \cdot p(1-p)}{0,02^2}$$

Como no podemos conocer p , ya que n es lo que se busca, se puede usar una estimación conservadora, utilizando $p = 0,5$ para que $p(1-p)$ sea máximo. De donde al despejar se obtiene $n \approx 2627$.

P5:

1. De acuerdo al enunciado, una medicina es efectiva si el porcentaje de alivio es de al menos un 60%. Por ende, si queremos probar que la nueva medicina es mejor, el porcentaje de alivio de esta deberá ser de 60% o más. Si p representa la proporción de alivios con la nueva medicina en la población, entonces la hipótesis que nos interesa probar es si $p > 0,6$. Por ende las hipótesis deben ser:

$$\begin{aligned} H_0 : & p \leq 0,6 \\ H_1 : & p > 0,6 \end{aligned}$$

Se busca entonces rechazar H_0 para probar la efectividad de la nueva medicina.

2. De acuerdo al planteamiento de las hipótesis, la región crítica es de la forma $W = \hat{p} = \bar{X} > C$, la cual se deriva directamente del lema de Neyman-Pearson. En este caso se tiene que para nuestro set de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 : & p \leq 0,6 & \Leftrightarrow & H_0 : p = p_0 \\ H_1 : & p > 0,6 & & H_1 : p = p_1 \end{aligned}$$

Donde $p_1 > p_0$.

Si X representa el estado de alivio de un paciente, entonces $X \sim Ber(p)$. La función de verosimilitud para una muestra X_1, X_2, \dots, X_n es:

$$f(x/p) = p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$$

Por el lema de Neyman-Pearson, se rechaza H_0 si:

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_0} &> k \\ \frac{p_1^{\sum x_i} (1-p_1)^{n-\sum x_i}}{p_0^{\sum x_i} (1-p_0)^{n-\sum x_i}} &> k \\ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\sum x_i} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-\sum x_i} &> k \\ \Rightarrow W = \{\hat{p} > C\} \end{aligned}$$

Donde $\hat{p} = \bar{X}$.

3. Encontrar el P-Valor es encontrar la probabilidad de obtener un estadístico al menos tan extremo como el obtenido por la muestra suponiendo que H_0 es cierto. Es decir, ¿qué tan raro es encontrar una proporción de $70/100 = 70\%$ o más de alivios para la nueva medicina, suponiendo que su efectividad es 60% o menos (H_0 cierta)?. Si este evento es poco probable (P-Valor pequeño) entonces nuestra suposición inicial es falsa (se rechaza H_0).

Debemos calcular entonces:

$$Pr(\hat{p} \geq 0,7 / p = 0,6) = Pr\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \frac{0,7 - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} / p = 0,6\right) = Pr(Z > 2,04)$$

En la tabla Normal, se tiene que esta probabilidad es de 0,025, que corresponde al P-Valor. Como el P-Valor es pequeño, se rechaza H_0 , por lo que la nueva medicina es mejor.

P6:

Debemos encontrar a y b tales que:

$$Pr\left(a \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq b\right) = 0,98$$

Para ello debemos encontrar una función pivote para dicho cociente. En este caso, recordemos que es el estadístico:

$$F = \frac{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} / n_1 - 1}{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} / n_2 - 1} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Modificando la desigualdad dentro de la probabilidad para contruir el estadístico F se tiene:

$$Pr\left(\frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)} \cdot \frac{1}{b} \leq F \leq \frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)} \cdot \frac{1}{a}\right) = Pr(f_1 \leq F \leq f_2) = 0,98$$

Dado que la distribución F no es simétrica, se toma cada cola de 0,01 por separado:

$$P(F > f_2) = 0,01 \Rightarrow f_2 = F(0,01)_{14,11} = 4,29$$

$$P(F < f_1) = Pr\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_1}\right) = 0,01 \Rightarrow \frac{1}{f_1} = F(0,01)_{11,14} = 3,86 \Rightarrow$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)} \approx 14,43$$

Luego $a = 14,43/4,30 \approx 3,4$ y $b = 14,43 \cdot 3,86 \approx 55,7$, por lo que el intervalo buscado es:

$$IC_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = [3,4; 55,7]$$