

# MA34B - Ejercicios Control 2

## Guía N°1 (Soluciones P1,P2 y P3)

20 de mayo de 2006

**Profesor cátedra: Rodrigo Abt B.**  
**Auxiliar: Julio Deride**

**P1:**

1. Un intervalo de confianza para  $\lambda$  equivale a encontrar valores  $a$  y  $b$  tales que:

$$Pr(a \leq \lambda \leq b) = 1 - \alpha$$

Veamos el comportamiento de la variable  $Y$ , ( $n = 30$ ):

$$E(Y) = E(\sum_{i=1}^n X_i) = nE(X) = \frac{n}{\lambda}$$

$$Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^n X_i) = nVar(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Sea  $Z = (Y - E(Y))/\sqrt{Var(Y)}$ , entonces:

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}} = \frac{Y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \sim N(0, 1)$$

Reemplazando en la desigualdad de la probabilidad:

$$Pr(a \leq \lambda \leq b) = Pr\left(\frac{Y - \frac{n}{b}}{\sqrt{\frac{n}{b^2}}} \leq \frac{Y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq \frac{Y - \frac{n}{a}}{\sqrt{\frac{n}{a^2}}}\right) = Pr(L \leq Z \leq U)$$

De donde por simetría (ya que  $Z \sim N(0, 1)$ ), y se toma  $L = -U$ . Luego se tiene  $Pr(-U \leq Z \leq U) = Pr(|Z| < U)$ . Entonces:

De esta última desigualdad:

$$\left| \frac{Y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \right| \leq U \Rightarrow \left( \frac{Y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \right)^2 \leq U^2$$

De donde se obtiene una ecuación cuadrática sobre  $\lambda$ , cuyas soluciones son:

$$\lambda = \frac{n}{y} \pm \frac{U}{y} \sqrt{n} \Rightarrow IC_\lambda = \left[ \frac{n}{y} - \frac{U}{y} \sqrt{n}, \frac{n}{y} + \frac{U}{y} \sqrt{n} \right]$$

Reemplazando  $n = 30, y = 150$  y  $U = 1,96$  se obtiene finalmente  $IC_\lambda = [0, 128; 0, 272]$ .

NOTA: Nótese la similitud del desarrollo con la derivación del intervalo para proporciones.

2. Para encontrar el resultado podemos usar dos caminos: a) Usar la distribución acumulada, o b) Seguir el HINT y usar la f.g.m.

Veamos primero la alternativa b):

La f.g.m. para  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  es

$$\varphi_Y(k) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(k) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - k} \right)^n$$

De donde la f.g.m. para  $T = 2\lambda Y$  es:

$$\varphi_T(k) = \varphi_Y(2\lambda k) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - 2\lambda k} \right)^n = \left( \frac{1}{1 - 2k} \right)^n$$

Que es la f.g.m. de una  $\chi^2$  con  $2n$  grados de libertad.

NOTA: Para resolver por a) es necesario recordar que la suma de  $n$  v.a.s. exponenciales de parámetro  $\lambda$  es una  $Gamma(n, \lambda)$ .

3. Veamos el caso exacto:

$$Pr(a \leq \lambda \leq b) = Pr(2ya \leq 2y\lambda \leq 2yb) = Pr(L \leq T \leq U) = 0,95$$

Como  $T \sim \chi^2_{2n}$  debemos tomar colas de 0,025 para cada lado y resolver por separado. (NOTA: Recordar cálculo de intervalo para una varianza...)

De las tablas se obtiene entonces  $L = 40,482$  y  $U = 83,298$ , de donde  $a = 0,135$  y  $b = 0,278$ .

4. Cuando los tamaños de muestra son grandes se puede proceder de cualquiera de las dos maneras. Sin embargo cuando la muestra es pequeña el Teorema del Límite Central no proporciona buenos resultados por lo que se recurre al cálculo dado por el punto 3.

**P2:**

1. El primer paso consiste en plantear correctamente las hipótesis. Si  $\mu_X$  corresponde a la temperatura media del 1 de marzo de 2005 y  $\mu_Y$  a su equivalente de 2006, se desea probar si  $\mu_X > \mu_Y$ . De donde el orden de las hipótesis es:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_X &\leq \mu_Y & \Leftrightarrow & H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0 \\ H_1 : \mu_X &> \mu_Y & \Leftrightarrow & H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0 \end{aligned}$$

En este caso tenemos v.a.s. independientes CON LA MISMA VARIANZA desconocida (NOTA: Si se lee BIEN el enunciado se observa que los datos de la tabla son de la MUESTRA, por lo que las varianzas ahí presentadas son MUESTRALES). Este es un problema de diferencia de medias con varianza desconocida. En este caso la región crítica del problema es:

$$W = \{\bar{X} - \bar{Y} > C\}$$

Y el estadístico de contraste es:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{Sp \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t_{n_X + n_Y - 2}$$

Donde  $Sp^2 = (n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2) / (n_X + n_Y - 2)$  es un estimador insesgado para  $\sigma^2$  usando ambas poblaciones. Usamos entonces el Error de Tipo I para encontrar el valor de  $C$ :

$$Pr(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}) = P(\bar{X} - \bar{Y} > C / \mu_X - \mu_Y = 0) = 0,05$$

De donde:

$$Pr\left(\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} > \frac{C - (\mu_X - \mu_Y)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} / \mu_X - \mu_Y = 0\right) = 0,05$$

De las tablas ( $t$  Student con  $10 + 8 - 2$  grados de libertad) se tendrá entonces que:

$$\frac{C}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = 1,746 \Rightarrow C = 1,746 \cdot Sp\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}$$

De acuerdo a los datos del problema:

$$Sp = \sqrt{\frac{10 \cdot 71 + 8 \cdot 246}{10 + 8 - 2}} = 12,94$$

De donde  $C = 1,746 \cdot 12,94 \cdot \sqrt{18/80} \approx 10,69$ . Como  $\bar{X} - \bar{Y} = 6 < C = 10,69 \Rightarrow$  No se rechaza  $H_0$ .

2. Para construir un intervalo de confianza para  $\delta = \mu_X - \mu_Y$  se utiliza el mismo estadístico que en la parte 1, luego:

$$Pr(a \leq \mu_X - \mu_Y \leq b) = Pr\left(-U \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \leq U\right) = 0,95$$

De las tablas, se tiene que  $Pr(-U < T < U) = 0,95 \Leftrightarrow Pr(T > U) = 0,025 \Rightarrow U = 2,12$ . De donde es fácil despejar los valores de  $a$  y  $b$ .

### P3:

Datos:  $n = 40, \bar{X} = 208,5, S_{n-1} = 30$ . Las hipótesis en este caso son:

$$H_0 : \mu \leq 200$$

$$H_1 : \mu > 200$$

La región de rechazo<sup>1</sup> es  $W = \bar{X} > k$ , y como en este caso el problema es el de una media de un v.a. Normal con varianza desconocida, el estadístico de contraste es:

---

<sup>1</sup>NOTA: El valor de  $k$  del problema no tiene ninguna relación con el valor  $k$  que aparece en el Lema de Neyman-Pearson. Solo sustituye a  $C$  de manera notacional

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

NOTA: Como el tamaño de muestra  $n = 40$  es razonablemente apreciable, prácticamente es irrelevante trabajar con  $S_{n-1}$  o  $S_n$ .

Usamos el Error de Tipo I:

$$Pr(\bar{X} > k/\mu = 200) = Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S_{n-1}/\sqrt{n-1}} > \frac{k - \mu}{S_{n-1}/\sqrt{n-1}}/\mu = 200\right) = 0,1$$

De las tablas se tiene que:

$$\frac{k - \mu}{S_{n-1}/\sqrt{n-1}} = \frac{k - 200}{30/\sqrt{39}} \approx 1,303$$

De donde  $k \approx 206,18$ . En este caso como  $\bar{X} = 208,5 > k = 206,18 \Rightarrow$  Se rechaza  $H_0$ .

**Las partes 2)y 3) de este problema no corren puesto que eran parte de otro problema. Se piden las disculpas del caso.**