

# MA34B Sección 02 - Guía de Ejercicios

## Propuestos Control 1

12 de Abril 2006

**Profesor cátedra: Rodrigo Abt B.**  
**Auxiliar: Julio Deride**

**P1)** Considere el experimento de lanzar  $n$  veces una moneda, en que la probabilidad de obtener una cara en cualquier lanzamiento ( $X_i = 1$ ) es  $p$ . Suponemos que la moneda puede tener dos caras ( $p = 1$ ) o ser equilibrada ( $p = 1/2$ ), lo cual lo reflejamos a través de una distribución a priori  $h(p)$  tal que  $h(p = 1) = a$  y  $h(\frac{1}{2}) = 1 - a$ , con  $a \in (0, 1)$ . Muestre que la distribución a posteriori para  $p$  es:

$$\xi(p = 1|X) = \begin{cases} \frac{2^n a}{2^n a + (1-a)} & \text{Si } \sum x_i = n \\ 0 & \text{Si } Y < n \end{cases}$$

$$\xi(p = \frac{1}{2}|X) = \begin{cases} \frac{1-a}{2^n a + (1-a)} & \text{Si } \sum x_i = n \\ 1 & \text{Si } Y < n \end{cases}$$

**P2)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una m.a.s. de una v.a.  $X$  con f.d.p.:

$$f(x/\lambda) = \begin{cases} \lambda(1+x)^{-(1+\lambda)} & \text{Si } x \geq 0 \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

a) Muestre que el EMV  $\hat{\lambda}$  para  $\lambda$  es:

$$\hat{\lambda} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i) \right]^{-1}$$

- b) Muestre que  $Y_i = \ln(1 + X_i)$  sigue una  $\exp(\lambda)$ .  
 c) Muestre que  $\tilde{\lambda} = \frac{n-1}{n}\hat{\lambda}$  es insesgado.

**P3)** Suponga una v.a.  $X$  que sigue una distribución  $\text{Bin}(n, \theta)$ , y además que  $\theta$  tiene una distribución uniforme en  $[0, 1]$ . Considere la siguiente función de pérdida:

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta(1 - \theta)}$$

Muestre que el estimador de Bayes para una sola observación  $x$  es  $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$ .

HINT: Sean  $a$  y  $b$  dos números naturales. Entonces:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Donde  $\Gamma(n) = (n-1)!$  cuando  $n$  es natural.

**P4)** En un experimento genético, se encontró que de una muestra de  $n$  individuos,  $a, b$  y  $c$  contenían los genes  $GG, Gg$  y  $gg$  respectivamente. La frecuencia de aparición de un gen tipo  $G$  en la población es  $\theta/(\theta+1)$ , donde  $\theta$  es desconocido. Se supone que los individuos no están relacionados y que dos genes en un individuo son independientes. Muestre que la función de verosimilitud de aparición del par de genes en la muestra es proporcional a:

$$\frac{\theta^{(2a+b)}}{(1+\theta)^{(2a+2b+2c)}}$$

Y que el Estimador Máximo Verosímil  $\hat{\theta}$  para  $\theta$  es:

$$\hat{\theta} = \frac{2a+b}{b+2c}$$

**P5)** Un máquina que fabrica piezas metálicas, cuando opera de manera correcta, solo presenta un 10 % de piezas defectuosas, y permite obtener un beneficio de \$2.000.000 por el total de la producción. Cuando el proceso opera de manera incorrecta aparece un 30 % de piezas defectuosas. Antes de comenzar el proceso, el operario a cargo puede comprobar la máquina

y determinar si el proceso operará de manera correcta o no, con un costo de \$100.000. Si al comprobar se descubre que el proceso operará de manera incorrecta, deberá arreglar la máquina con un costo de \$300.000. Si no comprueba, y la máquina opera incorrectamente, se obtiene un beneficio de solo \$1.200.000, debido al mal funcionamiento. Antecedentes históricos proporcionados por la empresa revelan que en los últimos años la máquina ha funcionado correctamente un 80% de las veces. Datos:

$d_1$  : Comprobar

$d_2$  : no Comprobar

$\theta_1$  : Proceso opera correctamente ( 10% de defectos)

$\theta_2$  : Proceso opera de manera incorrecta ( 30% de defectos)

$Pr(\theta = \theta_1) = p = 0,8$

- a. Encuentre la decisión bayesiana a priori.
- b. Encuentre la condición sobre  $p$  de modo que siempre se decida comprobar.
- c. Antes de partir, se toma una muestra aleatoria de dos piezas. Encuentre las decisiones bayesianas a posteriori si:

1. Ambas piezas son defectuosas
2. Una pieza es defectuosa y la otra no
3. Ambas piezas no son defectuosas

HINT: Encuentre la distribución de probabilidad del número de piezas.

- d. Encuentre el valor de la información muestral.