

# MA34B - Estadística

## Teoría

## De Decisiones

Prof. Rodrigo Abt B.

`rabt@dim.uchile.cl`

*Fac. de Ciencias Físicas y Matemáticas, U. de Chile*

10 de Abril, 2006

# INTRODUCCION

- Desde que la humanidad hace uso de la razón es que nos vemos enfrentados diariamente a problemas de decisión.
- Decimos que tenemos un problema de decisión cuando frente a una situación o problema se nos presentan dos o más acciones posibles.
- ¿Qué elementos caracterizan un problema de decisión?
  - \* Un **sujeto**, que actúa como tomador de decisiones.
  - \* Un conjunto de **decisiones** y/o acciones posibles.
  - \* Un **criterio**, que sirve para determinar las acciones a seguir.
- ¿Qué clase de decisiones requieren de una teoría?
  - \* Aquellas que involucran múltiples acciones, grandes y complejas, con beneficios y pérdidas asociados.
  - \* Las decisiones bajo incertidumbre.
  - \* Aquellas en que participan múltiples actores con variadas estrategias.
- En este curso nos centraremos en el estudio de las decisiones bajo incertidumbre, es decir, aquellas en que los resultados de cada decisión se ven influenciados por diferentes estados de la naturaleza.

## EJEMPLO

Un agricultor tiene un fundo en el sur, en el que puede plantar soya, arroz o zapallo. Durante la cosecha puede llover o no. Los pagos esperados (en miles de pesos) por cargamento para cada situación se presentan en la siguiente tabla:

	Soya	Arroz	Zapallo
Llueve	500	700	400
No llueve	1.000	300	700

¿Qué le conviene plantar al agricultor?

En este caso podemos identificar los siguientes elementos del problema de decisión:

- Un conjunto de acciones: sembrar soya, arroz o zapallo.
- Dos eventos de la naturaleza: llueve o no llueve.
- Pagos asociados a cada combinación decisión-evento.

## CONSERVADORES, PESIMISTAS Y OPTIMISTAS

- Para poder decidir, necesitamos contar con un criterio o regla, que, basándose en la información disponible nos permita obtener el **mejor** resultado.
- Sin embargo, no todos deciden de la misma manera. Existen los arriesgados, los conservadores, los optimistas y los pesimistas, dependiendo de su aversión al riesgo:
  - \* Un pesimista, por ejemplo, tratará de sacar el mejor provecho de los peores escenarios para cada decisión. En este caso, se elegiría plantar soya. (Criterio de Wald o Maximin).
  - \* El optimista en cambio, sacará provecho de los mejores escenarios para cada decisión. (Criterio Maximax).
  - \* Alguien menos conservador podría descontar el mayor beneficio de cada evento a todas las celdas de su fila, y con ello construir una matriz de pérdidas para usar un criterio más oportunista. Querrá lo mejor de las peores pérdidas (Criterio de Savage o Minimax).
  - \* Otros enfoques buscan balancear con pesos o ponderadores los peores escenarios frente a los mejores (Criterio de Hurcwiz).

*¿Cómo decidiría el agricultor si un amigo "experto"  
le revela que la probabilidad de  
lluvia es de 0,75?*

## CRITERIO DEL VALOR ESPERADO

- Si apostamos por la lluvia, y plantamos arroz, recibiríamos un beneficio de 700. Pero la probabilidad no implica certeza, lo que significa que si no llueve, solo recibiríamos 300, en cuyo caso deberíamos haber plantado soya.
- Supongamos que el pronóstico es siempre igual para cada cosecha. En el largo plazo nos equivocariámos un 25% de las veces, por lo que nuestras ganancias promedio serían  $0,75 \cdot 500 + 0,25 \cdot 1.000 = 625$  en el caso de plantar soya. Si plantamos arroz, la ganancia promedio sería de  $0,75 \cdot 700 + 0,25 \cdot 300 = 600$ . En el caso del zapallo, la ganancia promedio es de  $0,75 \cdot 400 + 0,25 \cdot 700 = 475$ . Comparando todos los casos, conviene plantar soya.
- Nuestro criterio sería entonces elegir aquella decisión (en este caso) con el mayor beneficio esperado.

# TEORIA DE DECISIONES

Podemos formalizar el planteamiento de los problemas de decisión de la siguiente manera:

- \* Se cuenta con un conjunto de decisiones o acciones:  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ .
- \* Existe un conjunto de estados de la naturaleza:  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  con una ley de probabilidades a priori  $\xi(\theta)$  asociada.
- \* Existe una función de pérdida<sup>1</sup>  $L: \Theta \times D \rightarrow [0, \infty)$  para cada combinación estado-decisión:
- \* La información se puede resumir en una Matriz o Tabla de Pagos:

	$d_1$	$d_2$	$\dots$	$d_k$
$\theta_1$	$L_{11}$	$L_{12}$	$\dots$	$L_{1k}$
$\theta_2$	$L_{21}$	$L_{22}$	$\dots$	$L_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\theta_n$	$L_{n1}$	$L_{n2}$	$\dots$	$L_{nk}$

<sup>1</sup>Solo para generalizar la teoría. También se puede trabajar con funciones de utilidad o beneficio

# RIESGO

- Para cada decisión  $d_j$  se puede calcular el riesgo esperado  $\rho_j$ :

$$\rho_j = R(d_j) = E[L(\theta, d_j)] = \sum_{\Theta} L(\theta, d_j) \xi(\theta)$$

- Se elegirá la decisión  $d_j$  que minimice el riesgo esperado. Dicha decisión se denomina **Decisión Bayesiana**.
- Una decisión  $d$  se dirá **inadmisible** si existe una decisión  $d^*$  tal que:

$$L(\theta, d^*) \leq L(\theta, d) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Las decisiones de este tipo deberán ser descartadas del análisis, ya que no dominarán bajo ningún criterio. En este caso se dice que la decisión  $d^*$  domina a  $d$ .<sup>1</sup>

- En el caso del agricultor, la decisión de plantar zapallo es inadmisibile, ya que existe una decisión que, para cualquier evento, siempre reporta mejores ganancias. Por lo tanto, descartamos plantar zapallo.

<sup>1</sup>Recordar que se está trabajando con funciones de pérdida



## PLANTEAMIENTO FORMAL

En el caso de nuestro agricultor tenemos los siguientes elementos:

- Dos decisiones: plantar soya ( $d_1$ ), o plantar arroz ( $d_2$ ).
- Dos estados de la naturaleza: llueve ( $\theta = 1$ ), o no llueve ( $\theta = 0$ ), y sus probabilidades asociadas,  $\Pr(\theta = 1) = 0,75$  y  $\Pr(\theta = 0) = 1 - \Pr(\theta = 1) = 0,25$
- Una matriz de pagos asociada:

	$d_1$	$d_2$
$\theta_1$	500	700
$\theta_2$	1.000	300

- Los beneficios esperados por cada decisión son, entonces, los siguientes:

$$\rho_1 = 625$$

$$\rho_2 = 600$$

- Se elige la decisión  $d_1$ , plantar soya, ya que reporta el mayor pago esperado.

## LA INFORMACION MUESTRAL

Supongamos que nuestro agricultor recuerda que en épocas pasadas de plantación, de cada 10 días (observados al azar) en que llovía, había 8 en que las flores del jardín permanecían cerradas, y de 10 días en que no llovía, había solo 4 días en que las flores permanecían cerradas. Podemos resumir esta información en la siguiente tabla:

	<b>Flores cerradas</b>	<b>Flores abiertas</b>	<b>Total</b>
Lluvia	8	2	10 días
No lluvia	4	6	10 días

Supongamos que un día el agricultor se asoma al campo y observa flores cerradas. ¿Qué debería plantar nuestro agricultor, dada la evidencia proporcionada por esta nueva información?

## LA INFORMACION MUESTRAL (2)

- En términos teóricos podemos modelar esta información a través de una v.a.  $X$ :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si las flores están cerradas} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- Y sean los estados de la naturaleza  $\theta = 1$  si llueve y  $\theta = 0$  si no.
- Con esta información podemos construir probabilidades condicionales para  $X$  cuando llueve:

$$\Pr(X = 1 \mid \theta = 1) = \frac{8}{10} \quad \Pr(X = 0 \mid \theta = 1) = \frac{2}{10}$$

- Asimismo, cuando no llueve:

$$\Pr(X = 1 \mid \theta = 0) = \frac{4}{10} \quad \Pr(X = 0 \mid \theta = 0) = \frac{6}{10}$$

Esta información claramente nos hace dudar del pronóstico del tiempo. Necesitamos entonces un mecanismo para actualizar nuestras probabilidades a priori de estado, y para ello recurrimos a un famoso teorema de la probabilidades.

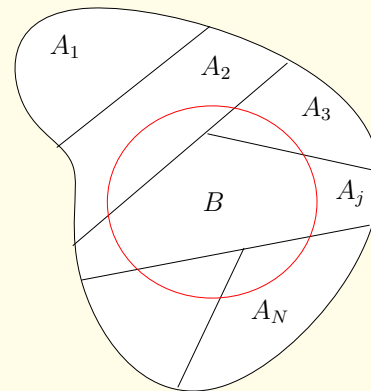
## TEOREMA DE BAYES

El Teorema de Bayes establece que dado un conjunto de sucesos elementales (partición)  $\{A_j\}$  tales que:

$$\bigcap_{i=1}^N A_i = \emptyset$$

Y se tiene un suceso  $B$  del cual se conocen las probabilidades  $\Pr(B \mid A_j)$ , entonces:

$$\Pr(A_j \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_j)\Pr(A_j)}{\sum_{i=1}^N \Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}$$



## ACTUALIZACION DE PROBABILIDADES

Usando este teorema podemos actualizar las probabilidades a priori de lluvia y no lluvia:

$$\Pr(\theta = 1 \mid X = 1) = \frac{\Pr(X = 1 \mid \theta = 1)\Pr(\theta = 1)}{\Pr(X = 1 \mid \theta = 0)\Pr(\theta = 0) + \Pr(X = 1 \mid \theta = 1)\Pr(\theta = 1)}$$

$$\approx 0.86$$

$$\Pr(\theta = 0 \mid X = 1) = 1 - \Pr(\theta = 1 \mid X = 1)$$

$$= 0.14$$

Asimismo:

$$\Pr(\theta = 1 \mid X = 0) = 0.5 \quad \Pr(\theta = 0 \mid X = 0) = 0.5$$

Del resultado podemos inferir que nuestras suposiciones son correctas, si se ve una fbr cerrada es lógico aumentar la probabilidad de lluvia, la cual pasa de 0.75 a 0.86. A su vez, si las fbrs se ven abiertas, la probabilidad de lluvia decae de 0.75 a 0.5.

## DECISIONES A POSTERIORI

Como el agricultor observa las fbrs cerradas, entonces, calcula el beneficio esperado con las probabilidades a posteriori, tomando  $X = 1$ :

$$\rho_1(X = 1) = E[L(\theta \mid X = 1, d_1)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_1) \Pr(\theta = i \mid X = 0) = 570$$

$$\rho_2(X = 1) = E[L(\theta \mid X = 1, d_2)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_2) \Pr(\theta = i \mid X = 0) = 644$$

Como se puede apreciar, dado que  $\rho_2(X = 1) > \rho_1(X = 1)$ , entonces conviene plantar arroz.

## DECISIONES A POSTERIORI (2)

Si el agricultor hubiese observado las fbras abiertas, entonces:

$$\rho_1(X = 0) = E[L(\theta \mid X = 0, d_1)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_1) \Pr(\theta = i \mid X = 0) = 750$$

$$\rho_2(X = 0) = E[L(\theta \mid X = 0, d_2)] = \sum_{i=0,1} L(\theta = i, d_2) \Pr(\theta = i \mid X = 0) = 500$$

Se observa que en este caso conviene plantar soya.

Independientemente del resultado de la observación de las fbras, el agricultor puede anticiparse construyendo una **Política de Decisiones**.

## POLITICA DE DECISIONES

Una política de decisiones es una función  $\delta: X \rightarrow D$ , que para cada valor de la v.a.  $X$ , devuelve la decisión Bayes correspondiente. En nuestro caso:

$$\delta(X) = \begin{cases} d_2 & \text{si } X = 1 \\ d_1 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Podemos deducir el beneficio esperado total de usar esta política de decisiones, tomando el valor esperado del riesgo derivado de cada decisión Bayes para cada valor de  $X$ . Observemos primero que:

$$\rho(X) = \sum_{\theta} L(\theta, \delta(X)) \xi(\theta|X)$$

Si tomamos el valor esperado de  $\rho(X)$  sobre  $X$ :

$$\rho = E[\rho(X)] = \sum_{\theta} \sum_x L(\theta, \delta(X = x)) \xi(\theta|X = x) \Pr(X = x)$$



## RIESGO GLOBAL

Del teorema de Bayes tenemos que:

$$\xi(\theta|X = x) = \frac{\Pr(X = x|\theta)\xi(\theta)}{\Pr(X = x)}$$

Reemplazando en la expresión del riesgo global:

$$\rho(\delta) = \sum_{\Theta} \sum_x L(\theta, \delta(X = x)) \Pr(X = x) \xi(\theta)$$

En el caso de nuestro agricultor, el riesgo global es:

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= L(\theta = 0, d_1) \Pr(X = 0|\theta = 0) \xi(\theta = 0) + L(\theta = 1, d_1) \Pr(X = 0|\theta = 1) \xi(\theta = 1) + \\ &L(\theta = 0, d_2) \Pr(X = 1|\theta = 0) \xi(\theta = 0) + L(\theta = 1, d_2) \Pr(X = 1|\theta = 1) \xi(\theta = 1) = \\ &1.000 \cdot 0,6 \cdot 0,25 + 500 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 300 \cdot 0,4 \cdot 0,25 + 700 \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 675 \end{aligned}$$

## VALOR DE LA INFORMACION

- El beneficio total calculado en la parte anterior tiene sentido si tuviéramos conocimiento de las posibles respuestas del amigo "experto".
- Si no tuviéramos la información, deberíamos usar solo la información a priori del pronóstico con un beneficio esperado de 625, plantando soya.
- ¿Cuál es el valor de la información muestral?. Respuesta: La diferencia del riesgo esperado obtenido con información y el riesgo esperado obtenido sin información (a priori), esto es  $675 - 625 = 50$ .
- ¿Cuál es valor esperado de contar con información perfecta (VEIP) ?. Es la diferencia entre el riesgo esperado bajo información perfecta y el riesgo a priori. En este caso el  $VEIP = 1.000 * 0,25 + 700 * 0,75 - 625 = 150$ .