

Estadística

Profesor de Cátedra: Rodrigo Abt
Profesor Auxiliar: Julio Deride

Clase Auxiliar #1
Lunes 27 de marzo de 2006

Problema 1.1. Sea X una v.a. con distribución $Bernoulli(p)$. Sean T_i , $i = 1, \dots, k$ estimadores de p , tal que $E(T_i) = p + b_i$. Se define $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i$ como un nuevo estimador.

1. Dé las condiciones de λ_i para que T sea insesgado.
2. Sea $b_i = 0 \quad \forall i$. Encuentre las ecuaciones que permiten encontrar los λ_i tal que $Var(T)$ sea mínima y tal que T sea insesgado.
3. Encuentre el estimador de momentos de p para una m.a.s. X_1, \dots, X_n . Calcule su varianza y esperanza.

Problema 1.2. Se considera X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, a]$, a fijo. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño n : $\{x_1, \dots, x_n\}$ en donde los x_i siguen una distribución uniforme en $[0, a]$ y son mutuamente independientes.

1. Dé la esperanza y la varianza de $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. ¿A qué distribución se aproxima la distribución de \bar{X} cuando n es grande?
2. Se considera el máximo de los valores muestrales: $Y = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Dé la distribución de Y y su esperanza.
3. Calcule la varianza de Y y dé su límite cuando n tiende al infinito.

Problema 1.3. Una fábrica de chocolate encargó a dos empresas de estudios de mercados FRIC y FRAC que estimen el consumo promedio mensual μ de chocolate per cápita en la población chilena. La empresa FRIC obtiene los consumos mensuales de chocolate per cápita sobre una m.a.s. de tamaño n de media muestral \bar{X} y varianza muestral S_n^2 . Por su parte, la empresa FRAC los obtiene de una m.a.s. de tamaño m de media muestral \bar{Y} y varianza muestral T_m^2 . Como las estimaciones de μ , \bar{X} y \bar{Y} , dadas respectivamente por FRIC y por FRAC, no son iguales, la fábrica decide combinar las dos estimaciones. Para ello, proponen dos estimadores:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{n\bar{X}}{m+n} + \frac{m\bar{Y}}{m+n}$$

1. Calcule la esperanza y la varianza de ambos estimadores en función de la varianza σ en la población.
2. Sea $\hat{\mu}_\alpha = \alpha\bar{X} + (1-\alpha)\bar{Y}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza de $\hat{\mu}_\alpha$.
3. Demuestre que $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

4. La fábrica propone ahora tres estimadores para la varianza σ^2 del consumo de chocolate en la población:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{S_n^2}{2} + \frac{T_M^2}{2}$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{nS_n^2}{n+m} + \frac{mT_m^2}{n+m}$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{nS_n^2 + mT_m^2}{n+m+2}$$

¿Cuáles de estos estimadores son insesgados?