

MA34B 02 - Pauta Control 1 - Semestre Otoño 2006
prof. Rodrigo Abt - aux. Julio Deride.

P1.

a) Se tiene la matriz de pagos, en que las celdas reflejan los costos asociados a cada evento-decisión:

	d_1	d_2
θ_1	- 10.000	- 150.000
θ_2	- 52.000	0

En que:

d_1 : Comprar flores

d_2 : No comprar flores

θ_1 : Es aniversario

θ_2 : No es aniversario

Bajo un criterio pesimista elijo la decisión que me reporta el menor costo para los peores escenarios de cada decisión. En este caso para d_1 el peor escenario es en $\theta = \theta_2$, y para d_2 es en $\theta = \theta_1$. El mejor de estos escenarios es para d_1 .

b) Se tiene:

- $Pr(\theta = \theta_1) = 0,1$
- $Pr(\theta = \theta_2) = 1 - 0,1 = 0,9$

De donde:

- $\rho_1 = L(\theta_1, d_1) \cdot Pr(\theta = \theta_1) + L(\theta_2, d_1) \cdot Pr(\theta = \theta_2) = -47.800$
- $\rho_2 = L(\theta_1, d_2) \cdot Pr(\theta = \theta_1) + L(\theta_2, d_2) \cdot Pr(\theta = \theta_2) = -15.000$

Como $\rho_2 \geq \rho_1$, elijo d_2 . Si usamos una probabilidad $Pr(\theta = \theta_1) = p$ tenemos:

- $\rho_1 = -10.000 \cdot p - 52.000 \cdot (1 - p)$
- $\rho_2 = -150.000 \cdot p$

Para ser indiferente a cualquier decisión basta resolver $-10p - 52(1 - p) = -150p$

$$\Rightarrow p = 0,27$$

c) Sea

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si amigo dice que es el aniversario} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Del enunciado se tiene:

$$Pr(X = 1/\theta = \theta_1) = 0,7 \quad Pr(X = 0/\theta = \theta_1) = 0,3$$

$$Pr(X = 1/\theta = \theta_2) = 0,2 \quad Pr(X = 0/\theta = \theta_2) = 0,8$$

Sea $Y = \sum_{i=1}^2 X_i \Rightarrow Y \sim Bin(2, p_i)$ $i = 1, 2$. En que p_i es la probabilidad de que un amigo diga que es el aniversario dado θ_i . Esto es, si:

$$\theta = \theta_1 \Rightarrow Y \sim Bin(2, Pr(X = 1/\theta_1) = 0,7)$$

$$\theta = \theta_2 \Rightarrow Y \sim Bin(2, Pr(X = 1/\theta_2) = 0,2)$$

Como se observa que **ambos** amigos dicen que es el aniversario ($Y = 2$), entonces:

$$Pr(Y = 2/\theta_1) = \binom{2}{2}(0,7)^2(0,3)^0 = 0,49$$

$$Pr(Y = 2/\theta_2) = \binom{2}{2}(0,2)^2(0,8)^0 = 0,04$$

De donde:

$$\xi(\theta_1/Y = 2) = \frac{Pr(Y = 2/\theta_1)Pr(\theta = \theta_1)}{\sum_{i=1,2} Pr(Y = 2/\theta_i)Pr(\theta = \theta_i)} = \frac{0,49 \cdot 0,1}{0,49 \cdot 0,1 + 0,04 \cdot 0,9} = 0,58$$

$$\xi(\theta_2/Y = 2) = 1 - \xi(\theta_1/Y = 2) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Luego, los pagos esperados son:

$$\begin{aligned} \rho_1(Y = 2) &= L(\theta_1, d_1) \cdot \xi(\theta_1/Y = 2) + L(\theta_2, d_1) \cdot \xi(\theta_2/Y = 2) \\ &= -10.000 \cdot 0,58 - 52.000 \cdot 0,42 = -27.640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(Y = 2) &= L(\theta_1, d_2) \cdot \xi(\theta_1/Y = 2) + L(\theta_2, d_2) \cdot \xi(\theta_2/Y = 2) \\ &= -150.000 \cdot 0,58 + 0 \cdot 0,42 = -87.000 \end{aligned}$$

Como $\rho_1(Y = 2) > \rho_2(Y = 2)$ entonces elijo d_1 .

d) Cuando Esteban consulta a la suegra tiene información perfecta, de donde el Valor Esperado de la Información Perfecta (VEIP) es:

$$\begin{aligned} VEIP &= \text{Max}_i \{L(\theta_1, d_i)\} \cdot \text{Pr}(\theta = \theta_1) + \text{Max}_i \{L(\theta_2, d_i)\} \cdot \text{Pr}(\theta = \theta_2) - \rho_{a \text{ priori}} \\ &= -1000 - (-15.000) = 14.000 \end{aligned}$$

MA34B 02 - Pauta Control 1 - Semestre Otoño 2006
prof. Rodrigo Abt - aux. Julio Deride.

P2.

Se tiene:

$$f(x/\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para una m.a.s. X_1, X_2, \dots, X_n , se tiene:

$$f_n(x/\theta) = \begin{cases} e^{-\sum(x_i-\theta)} & \text{si } x_1, x_2, \dots, x_n \geq \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

De aquí se tiene que f_n es máxima si $e^{n\theta}$ es máximo.

Esto solo sucede cuando $\theta = \text{Min}\{X_i\}$, luego:

$$\hat{\theta} = \text{Min}\{X_i\}$$

Para el estimador de Momentos solo basta resolver:

$$m_1 = \sum_{i=1}^n X_i^1 = \bar{X} = \mu_1 = E(X^1)$$

Sea $Y = X - \theta$. Encontremos $G(y)$ la F.d.a. de Y :

$$G(y) = \text{Pr}(Y \leq y) = \text{Pr}(X - \theta \leq y) = \text{Pr}(X \leq y + \theta) = F(y + \theta)$$

De donde:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = f(y + \theta) = e^{-y} \Rightarrow Y \sim \exp(1)$$

Luego:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) - \theta \\ 1 &= E(X) - \theta \Rightarrow E(X) = 1 + \theta \end{aligned}$$

Además se tiene que $1 = \text{Var}(Y) = \text{Var}(X - \theta) = \text{Var}(X)$

Luego el estimador de Momentos se obtiene de $\bar{X} = E(X) = 1 + \theta \Rightarrow \theta_{MOM} = \bar{X} - 1$

Propiedades del estimador de Momentos θ_{MOM} :

$$E(\theta_{MOM}) = E(\bar{X} - 1) = E(\bar{X}) - 1 = E(X) - 1 = \theta + 1 - 1 = \theta$$

$\Rightarrow \theta_{MOM}$ es insesgado.

$$Var(\theta_{MOM}) = Var(\bar{X} - 1) = Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

$\Rightarrow \theta_{MOM}$ es consistente.

NOTA: El estimador de Momentos es consistente por construcción.

Para encontrar la Esperanza y Varianza del Estimador Máximo Verosímil $\hat{\theta}$ necesitamos la distribución del mismo. Podemos obtener la F.d.a. de $\hat{\theta}$, $H(y)$:

$$\begin{aligned} H(y) &= \Pr(\hat{\theta} \leq y) = \Pr(\text{Min}\{X_i\} \leq y) = 1 - \Pr(\text{Min}\{X_i\} > y) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > y) \Pr(X_2 > y) \cdot \dots \cdot \Pr(X_n > y) \\ &= 1 - (1 - \Pr(X_1 \leq y))(1 - \Pr(X_2 \leq y)) \cdot \dots \cdot (1 - \Pr(X_n \leq y)) \\ &= 1 - (1 - F(y))^n \end{aligned}$$

De donde $h(y) = nf(y)(1 - F(y))^{n-1} = ne^{-(y-\theta)}\{e^{-(y-\theta)}\}^{n-1} = ne^{-n(y-\theta)}$ si $y \geq \theta$

Sea $Z = \hat{\theta} - \theta$, entonces:

$$\Pr(Z \leq z) = \Pr(\hat{\theta} - \theta \leq z) = \Pr(\hat{\theta} \leq z + \theta) = H(z + \theta) \Rightarrow$$

la densidad de Z es $h(z + \theta) = ne^{-nz}$ si $z \geq 0$. Por lo tanto $Z \sim \exp(n)$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\hat{\theta}) - \theta \\ \frac{1}{n} &= E(\hat{\theta}) - \theta \Rightarrow E(\hat{\theta}) = \theta + \frac{1}{n} \rightarrow \theta \ (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Además $\frac{1}{n^2} = Var(Z) = Var(\hat{\theta}) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

Finalmente, veamos los ECM para cada estimador:

$$ECM(\hat{\theta}) = (\theta - E(\hat{\theta}))^2 + Var(\hat{\theta}) = \frac{2}{n^2}$$

$$ECM(\theta_{MOM}) = Var(\theta_{MOM}) = \frac{1}{n}$$

De donde $ECM(\hat{\theta}) \leq ECM(\theta_{MOM}) \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \hat{\theta}$ es mejor estimador.

P3.

Sea:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si vota por alcalde} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) La variable X se distribuye según una Bernoulli de parámetro p , i.e.:

$$f(x/p) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

Un estimador insesgado para p es $\hat{p} = \bar{X}$, obtenido ya sea a través de Máxima Verosimilitud o por Momentos. Para determinar si es eficiente necesitamos encontrar la cota de Cramer Rao y comparar con la varianza de nuestro estimador. Veamos la función de verosimilitud:

$$f_n(x/p) = p^{\sum X_i} + (1-p)^{(n-\sum X_i)}$$

$$\ln f_n(x/p) = \sum X_i \ln p + (n - \sum X_i) \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln f_n(x/p)}{\partial p} = \frac{\sum X_i}{p} - \frac{(n - \sum X_i)}{(1-p)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_n(x/p)}{\partial p^2} = -\frac{\sum X_i}{p^2} - \frac{(n - \sum X_i)}{(1-p)^2}$$

$$I_n(p) = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f_n(x/p)}{\partial p^2}\right\} = \frac{np}{p^2} + \frac{(n-np)}{(1-p)^2} = n\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right] = \frac{n}{p(1-p)}$$

La cota de Cramer Rao es entonces

$$I_n^{-1}(p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

La varianza del estimador \hat{p} es $Var(\hat{p}) = Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} =$ cota de Cramer Rao

$\Rightarrow \hat{p}$ es eficiente.

La estimación para p es entonces: $\frac{14}{20} = 0,7$

b) La distribución a priori de p es una Beta(2,12), esto es:

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \quad \alpha = 2, \beta = 12$$

Para encontrar el estimador de Bayes p_B debemos examinar el producto de la función de verosimilitud y la distribución a priori de p en los términos que involucran a p :

$$f_n(x/p) \cdot \pi(p) \propto p^{\sum X_i} (1-p)^{n-\sum X_i} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}$$

$$f_n(x/p) \cdot \pi(p) \propto p^{\sum X_i + \alpha - 1} (1-p)^{n - \sum X_i + \beta - 1}$$

Se observa claramente en este caso que la distribución a posteriori de p es también una Beta con parámetros $\alpha' = \sum X_i + \alpha$ y $\beta' = n - \sum X_i + \beta$. Bajo pérdida cuadrática, el estimador de Bayes es simplemente la esperanza de la distribución a posteriori:

$$p_B = E[p/X] = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} = \frac{\sum X_i + \alpha}{n + \alpha + \beta} = \frac{14 + 2}{20 + 2 + 12} = 0,47$$

Si le hacemos caso a la historia se observa que es probable que el alcalde pierda la reelección. ¿Cuál estimador es más preciso?. Veamos los ECM:

$$ECM(\hat{p}) = Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$ECM(p_B) = (p - E(p_B))^2 + Var(p_B)$$

Reemplazando los valores, podemos observar que no es claro cuál de los estimadores es uniformemente mejor, ya que la comparación depende del verdadero valor de p que no conocemos.