

MA34B Sección 02 - Guía de Ejercicios

Resueltos Control 1

12 de Abril 2006

Profesor cátedra: Rodrigo Abt B.
Auxiliar: Julio Deride

P1) En clase, se indicó que una forma natural de estimar el parámetro desconocido de la densidad conjunta (o función de verosimilitud) de una m.a.s. X_1, \dots, X_n de $X \sim f(x/\theta)$ es maximizando la misma, es decir, resolviendo:

$$\max_{\theta} f(x_1, \dots, x_n/\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)$$

Despejando θ del problema de maximización anterior se obtiene el Estimador Máximo Verosímil (EMV) de θ .

a) Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X con ley $f(x/\theta)$, tal que las dos primeras derivadas de $f(x/\theta)$ existen y que $f(x/\theta) > 0$. Sea $L = \ln f(x_1, \dots, x_n/\theta)$, muestre que el problema anterior es equivalente a resolver:

$$\max_{\theta} L$$

b) Aplique el resultado anterior para encontrar el EMV $\hat{\lambda}$ de λ en el caso de una m.a.s. de una v.a. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Solución:

a) En efecto, al derivar se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_1, \dots, x_n/\theta) = \frac{f'(x_1, \dots, x_n/\theta)}{f(x_1, \dots, x_n/\theta)} = 0 \Rightarrow f'(x_1, \dots, x_n/\theta) = 0$$

b) Encontremos la función de verosimilitud $f(x_1, \dots, x_n/\lambda)$:

$$f(x_1, \dots, x_n/\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

De donde, $L = \ln f(x_1, \dots, x_n/\lambda) = -n\lambda + \left(\sum x_i\right) \ln \lambda - \ln \prod x_i!$

Derivando e igualando a cero:

$$-n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$$

El estimador EMV para λ es $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

P2) Una máquina produce un cierto componente electrónico una vez al día. La máquina puede fallar durante el día con probabilidad p . El operario de la máquina desea estimar esta probabilidad de falla a partir de un registro detallado de los días transcurridos para cada mes de funcionamiento hasta la primera falla.

- Si X_i representa el número de días transcurridos del mes i hasta que que falla la máquina. ¿Qué distribución sigue X_i ?
- Si se toma una muestra aleatoria simple de n meses, encuentre el EMV para p . ¿Es insesgado este estimador?
- Un estudio estadístico posterior del problema arrojó que la variable X seguía una distribución exponencial de parámetro p . Encuentre el EMV para p en este caso y compárelo con el obtenido en la parte anterior. Comente.

Solución:

- Se puede ver que X_i sigue una distribución *geométrica*, ya que:

no falla día 1 x no falla día 2 x ... x no falla día k-1 x falla día k

$$= (1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots \cdot (1-p) \cdot p = (1-p)^{k-1} p$$

- Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X , se tiene que:

$$f(x_1, \dots, x_n/p) = \prod_{i=1}^n f(x_i/p) = (1-p)^{\sum x_i - n} p^n$$

De donde se obtiene que el EMV de p es $\hat{p} = \bar{X}^{-1}$.

c) Si $X \sim \exp(p)$, se tiene que los estimadores coinciden en fórmula. Si bien ambas distribuciones sirven para modelar fenómenos de falla de materiales, en el primer caso, la distribución es discreta, mientras que si X es continua, entonces es más apropiado el segundo análisis.

P3) La talla en metros X de los alumnos de la Escuela de Ingeniería sigue una distribución Normal(μ, σ^2). Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de X .

a) Muestre que el EMV de σ^2 es la varianza muestral. ¿Es insesgado este estimador?.

b) Muestre que $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ es insesgado.

c) Sea $T = c \sum (X_i - \bar{X})^2$ otro estimador para σ^2 . Obtenga el valor de c tal que T tenga el menor error cuadrático medio. Hint(Si Y sigue una distribución χ_n^2 , entonces $E(Y) = n$ y $Var(Y) = 2n$.)

Solución:

a) Como es usual, se construye la función de verosimilitud, se aplica logaritmo, se deriva, se iguala a 0 y se despeja:

$$f(x_1, \dots, x_n/\lambda, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\lambda, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$\ln f(x_1, \dots, x_n/\lambda, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \quad (1)$$

De donde, $\hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$, que en clase se vio que era SESGADO.

b) Fácilmente se puede verificar que:

$$E(S_{n-1}^2) = E\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S_n^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow \text{es insesgado}$$

c) Para este caso se tiene que $T = cnS_n^2$, de donde, el ECM es:

$$\begin{aligned} ECM(T) &= (\sigma^2 - E(T))^2 + Var(T) = (\sigma^2 - E(cnS_n^2))^2 + Var(cnS_n^2) \\ &= (\sigma^2 - c\sigma^2 E(\frac{nS_n^2}{\sigma^2}))^2 + c^2\sigma^4 Var(\frac{nS_n^2}{\sigma^2}) \\ &= \sigma^4(1 - c(n-1))^2 + c^2\sigma^4 \cdot 2(n-1) \end{aligned}$$

Derivando e igualando a 0 se obtiene que $c = \frac{1}{n+1}$.

P4) Si el tiempo de espera de una micro en minutos X para una persona es tal que:

$$f(x/\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}x} \quad x > 0$$

Y sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a.s. de X :

- Encuentre el E.M.V. $\hat{\lambda}$ de λ . Calcule su esperanza y varianza.
- Encuentre la cota de Cramer-Rao para $\hat{\lambda}$. Es eficiente?.
- Si se observan los valores 2, 2,4, 3, 4,5, 3,0 encuentre el valor de $\hat{\lambda}$.
- Plantee la distribución exponencial de esta forma:

$$f(x/\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

Resuelva los puntos anteriores, y encuentre el EMV $\tilde{\lambda}$. Discuta. (HINT: Si $X_i \sim exp(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim Gamma(n, \lambda)$).

Solución:

- La función de verosimilitud es:

$$f(x_1, \dots, x_n/\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum x_i}$$

Aplicado logaritmo natural, derivando e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{-n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = E(X) = \lambda \Rightarrow \text{es insesgado}$$

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$$

b) Calculando la segunda derivada de la función de verosimilitud se tiene la información de Fisher:

$$I_n(\lambda) = -E \left[\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n/\lambda)}{\partial \lambda^2} \right] = -E \left[\frac{n}{\lambda^2} - 2 \frac{\sum x_i}{\lambda^3} \right] = -\frac{n}{\lambda^2} + 2 \frac{\sum E(X_i)}{\lambda^3} = \frac{n}{\lambda^2}$$

Y como $\hat{\lambda}$ es insesgado, la cota de Cramer-Rao es $I_n(\lambda)^{-1}$, cumpliéndose la igualdad de la varianza de $\hat{\lambda}$ con la cota, por lo que el estimador es eficiente.

c) En este caso solo basta reemplazar, y se obtiene $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2,98$.

d) Esta parte es análoga a la parte b):

$$f(x_1, \dots, x_n/\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

De donde al aplicar logaritmo natural, derivar e igualar a 0 se obtiene que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$. Ahora bien, se debe tener cuidado al calcular la esperanza de este estimador, ya que **NO** es cierto que:

$$E[\hat{\lambda}] = E \left[\frac{1}{\bar{X}} \right] \neq \frac{1}{E[\bar{X}]}$$

En este caso, se debe considerar que si $X \sim \exp(\lambda)$, entonces $T = \sum X_i$ sigue una $\text{Gamma}(n, \lambda)$, luego:

$$\begin{aligned} E[\hat{\lambda}] &= E \left[\frac{1}{T} \right] = \int_T \frac{1}{t} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = \int_T \frac{\lambda \cdot \lambda^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{n-1} \Rightarrow \text{es sesgado} \end{aligned}$$

P4) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a.s. de una v.a. X con distribución de Pareto:

$$f(x/\theta) = \frac{\theta c^\theta}{x^{\theta+1}} \quad c = \text{constante}$$

Encuentre el EMV $\hat{\theta}$ de θ .

Solución:

$$f(x_1, \dots, x_n/\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) = \frac{\theta^n \cdot c^{n\theta}}{\prod x_i^{\theta+1}}$$

Aplicando logaritmo natural, derivando e igualando a 0:

$$\frac{n}{\theta} + n \ln c - \sum \ln x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{n \ln c - \sum \ln X_i}$$

P5) Una gran compañía de energéticos ofrece al dueño de un terreno \$120.000 por los derechos de explotación de gas natural en un sitio determinado y un bono adicional de \$1.380.000 que se podrá cobrar solo si se encuentra gas durante la etapa de exploración. El propietario, considerando que el interés de la compañía energética es una buena indicación de que existe gas, está tentado a desarrollar él mismo el campo. Para hacer esto, deberá contratar equipos con experiencia en exploración y desarrollo. El costo inicial es de \$400.000, los que se perderán si no se encuentra gas. Sin embargo, si descubre gas, el propietario estima un beneficio neto de \$2.000.000. Sea d_1 la decisión de aceptar la oferta de la compañía, y d_2 la decisión de explorar y desarrollar por cuenta propia.

a. Contruya la matriz de beneficios asociada al problema, indicando todos los elementos que la componen.

b. Suponga que el propietario estima que la probabilidad de encontrar gas es de 0,6. Determine la decisión recomendable a priori.

c. El propietario tiene la opción de realizar pruebas de sonido al terreno. La prueba, eso sí, no es perfecta: el %30 de las veces la prueba indicará que no hay gas cuando en realidad había gas, y un %90 de las veces la prueba indicará que no hay gas cuando realmente no había. Con estas condiciones

determine la política de decisión adecuada, y determine el precio que debería pagar el propietario por la prueba.

d. Suponga que NO se encuentra gas. ¿Cuál sería la decisión a posteriori?

Solución:

a. La matriz de pagos asociada al problema es la siguiente:

	d_1	d_2
θ_1	1500	2000
θ_2	120	-400

Donde θ_1 es el evento "Hay gas", mientras que θ_2 corresponde al evento "No hay gas".

b. Del enunciado se tiene que $\xi(\theta_1) = P(\theta_1) = 0,6$, por lo que $\xi(\theta_2) = P(\theta_2) = 1 - P(\theta_1) = 0,4$. Los beneficios esperados a priori son los siguientes:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= E[L(d_1, \theta)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i) = 1500 \cdot 0,6 + 120 \cdot 0,4 = 948 \\ \rho_2 &= E[L(d_2, \theta)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i) = 2000 \cdot 0,6 + (-400) \cdot 0,4 = 1040\end{aligned}$$

Como $\rho_2 > \rho_1$, entonces elijo d_2 .

c. Sea

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Si la prueba revela que hay gas} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Del enunciado se tienen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}P(X = 0|\theta_1) &= 0,3 & P(X = 1|\theta_1) &= 0,7 \\ P(X = 0|\theta_2) &= 0,9 & P(X = 1|\theta_2) &= 0,1\end{aligned}$$

Para $X = 0$:

$$\begin{aligned}\xi(\theta_1|X=0) &= \frac{P(X=0|\theta_1)P(\theta_1)}{P(X=0|\theta_1)P(\theta_1) + P(X=0|\theta_2)P(\theta_2)} = \frac{1}{3} \\ \xi(\theta_2|X=0) &= 1 - \xi(\theta_1|X=0) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Para $X = 1$:

$$\begin{aligned}\xi(\theta_1|X=1) &= \frac{P(X=1|\theta_1)P(\theta_1)}{P(X=1|\theta_1)P(\theta_1) + P(X=1|\theta_2)P(\theta_2)} = \frac{21}{23} \\ \xi(\theta_2|X=1) &= 1 - \xi(\theta_1|X=1) = \frac{2}{23}\end{aligned}$$

Por lo que los beneficios a posteriori son:

Para $X = 0$:

$$\begin{aligned}\rho_1(X=0) &= E[L(d_1, \theta|X=0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i)\xi(\theta_i|X=0) = 1500 \cdot \frac{1}{3} + 120 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 580 \\ \rho_2(X=0) &= E[L(d_2, \theta|X=0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i)\xi(\theta_i|X=0) = 2000 \cdot \frac{1}{3} + (-400) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 400\end{aligned}$$

Luego, elijo d_1 .

Para $X = 1$:

$$\begin{aligned}\rho_1(X=1) &= E[L(d_1, \theta|X=1)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i)\xi(\theta_i|X=1) = 1500 \cdot \frac{21}{23} + 120 \cdot \frac{2}{23} \\ &= 1380 \\ \rho_2(X=1) &= E[L(d_2, \theta|X=1)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i)\xi(\theta_i|X=1) = 2000 \cdot \frac{21}{23} + (-400) \cdot \frac{2}{23} \\ &= 1791\end{aligned}$$

Luego, elijo d_2 .

La política de decisiones correspondiente es:

$$\delta(X) = \begin{cases} d_1 & \text{Si } X = 0 \\ d_2 & \text{Si } X = 1 \end{cases}$$

El beneficio esperado de esta política es entonces:

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= E_{\theta}[E_Y[L(\delta(Y), \theta)]] = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} L(\delta(Y), \theta_i) P(Y = Y(d_j) | \theta_i) P(\theta_i) \\ &= 1500 * 0,3 * 0,6 + 120 * 1 * 0,4 + 2000 * 0,7 * 0,6 + (-400) * 0,1 * 0,4 = 1137 \end{aligned}$$

Y por ende, el valor de la información es entonces:

$$VI = \rho(\delta) - \rho_{\text{priori}} = 1137 - 1040 = 97$$

Luego, el propietario debe estar dispuesto a desembolsar \$97.000 por contar con la información derivada de la prueba de sonido.

3.4 Si no se encuentra gas ($X = 0$), el beneficio esperado por cada decisión es:

$$\begin{aligned} \rho_1(X = 0) &= E[L(d_1, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_1, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 1500 \cdot \frac{1}{3} + 120 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 580 \\ \rho_2(X = 0) &= E[L(d_2, \theta | X = 0)] = \sum_{i=1}^2 L(d_2, \theta_i) \xi(\theta_i | X = 0) = 2000 \cdot \frac{1}{3} + (-400) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 400 \end{aligned}$$

Luego, elijo d_1 .

P6) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a.s. de una v.a. $X \sim N(\mu, 1)$. Dada una distribución $N(a, 1)$ a priori para μ , determine el estimador de Bayes bajo pérdida cuadrática.

Solución:

Observemos el aquella parte del producto $f_n(x/\mu) \cdot \pi(\mu)$ que depende de μ :

$$f_n(x/\mu) \cdot \pi(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mu - a)^2\right\}$$

De donde:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mu - a)^2\right\} \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\{(n+1)\mu^2 - 2\mu(n\bar{x} + a)\}\right\}$$

$$= -\frac{(n+1)}{2} \exp\left\{\mu^2 - 2\mu \frac{(n\bar{x} + a)}{n+1}\right\} = -\frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)} \exp\left\{\mu^2 - 2\mu \frac{(n\bar{x} + a)}{n+1}\right\}$$

De donde por inspección, dentro de la exponencial, se reconoce parte del desarrollo del cuadrado del binomio $\mu - \frac{(n\bar{x} + a)}{n+1}$, por lo que $\xi(\mu/X)$ es una distribución Normal con media $\frac{(n\bar{x} + a)}{n+1}$ y varianza $\frac{1}{n+1}$. El estimador de Bayes es entonces:

$$\mu_B = E[\mu|X] = \frac{(n\bar{x} + a)}{n+1}$$