PROBLEMA 8: Primero hay que ver cual es el conjunto donde se concentra X. Notemos que la máxima cantidad de bolitas que pueden quedar cuando se termine un color es n, y lo menos es 1, luego $D_X = \{1, \dots, n\}$. Calculemos primero la probabilidad de sacar sólo un color.

$$\mathbb{P}(X = n) = 2\frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n-2}{2n-2}\cdots\frac{2}{n+2}\frac{1}{n+1} = 2\frac{n!n!}{(2n)!},$$

hay que notar que está multiplicado por 2 porque el término lleno de productos de fracciones corresponde a la probabilidad que salga un único color, por ejemplo blancas, y como es la misma probabilidad que salgan solo negras o solo blancas se suman las dos probabilidades , es decir se multiplica por 2. Esto se va a ocupar siempre. Ahora veamos que pasa si solo se saca una de un color y el resto del otro:

$$\mathbb{P}(X = n-1) = 2\frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n-2}{2n-2}\cdots\frac{2}{n+2}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{1} = 2\frac{n!n!}{(2n)!}\binom{n}{1},$$

Aquí está escrita la probabilidad de que salgan $n-1$ de un color, después una del otro color y por último la que queda del primer color, para tener todos los casos es que se multiplica por $\binom{n}{1}$, que nos dice en cuantos lugares puede salir la bola del color que no se agota, antes de generalizar veamos el caso en que salen dos de un color

$$\mathbb{P}(X = n-2) = 2\frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n-2}{2n-2}\cdots\frac{2}{n+2}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\binom{n+1}{2} = 2\frac{n!n!}{(2n)!}\binom{n+1}{2},$$

Aquí ya se nota el porqué de la expresión, el término $\binom{n+1}{2}$ corresponde al número de formas en que pueden salir la dos bolas de un color antes de sacar la última del otro color. Así para $j \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\mathbb{P}(X = n-j) = 2\frac{n!n!}{(2n)!}\binom{n+(j-1)}{j}.$$