

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

TAREA 3

JUNIO 2006

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre X y Y , denotado por ρ_{XY} , como:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\}}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

- a) Muestre que si X, Y son independientes entonces $\rho_{XY} = 0$.
- b) Muestre, por medio de un ejemplo, que si $\rho_{XY} = 0$ no implica que X, Y son independientes.
- c) Muestre que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
- d) Muestre que $Y = a + bX$ si y sólo si $\rho_{XY} = 1$.
2. Sean $X_1 \rightarrow N(\mu, \sigma^2), X_2 \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere $Z(t) = X_1 \cdot \cos(wt) + X_2 \cdot \sin(wt)$, $V(t) = \frac{\delta Z(t)}{\delta t}$.
- a) Determine la distribución de $Z(t)$ y $V(t)$ (t fijo).
- b) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.
3. Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

- a) Determine $G_X^{(n)}(z)|_{z=0}$.
- b) Calcule $G_X(z)$ si $X \rightarrow P(\lambda)$.
4. Sean $X_i \rightarrow U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.: $Y = -2 \cdot \ln(\prod_{i=1}^n X_i)$. ¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(y > 55)$ si $n = 40$.

5. Sea X una v.a. tal que $\mathbb{E}(x^k) = (k+1)!2^k$, $k = 1, 2, \dots$. Determine, usando la F.G.M. la distribución de X .
6. Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.
7. Los responsables de una panadería han determinado que la demanda diaria de pan especial (en Kg.) es una v.a. con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < x < 1000 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Calcule k , $E(x)$ y $\text{Var}(x)$.
 - b) Calcule la probabilidad que la demanda total de un mes (30 días) supere los 18000 Kg.
 - c) El encargado de la panadería desea planificar su producción decidiendo cuánto pan diario producir (H en Kg) manteniéndolo constante todos los días.
 - d) Si el costo de producción es de \$ C (Kg.) y se vende a \$ V (Kg) , determine cuánto debe valer H para maximizar la utilidad esperada diaria por venta de pan. El pan que no se vende en el día debe eliminarse.
8. Una máquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a. $e(\lambda)$. Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye $e(\mu)$. Si la máquina está buena en $t=0$, calcule la probabilidad que lo esté en el instante t . Indicación: Considere el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{máquina buena en } t \\ 1 & \text{máquina mala en } t \end{cases}$$

Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

9. Usted llega al paradero de Blanco para esperar su micro (XXX). Por su experiencia sabe que ésta pasa según un proceso de Poisson de tasa λ cada 10 minutos.
- Calcule la probabilidad de que en un intervalo de 15 minutos pasen al menos 2 micros.
 - Se le acaba de pasar una micro. Calcule la probabilidad de que tenga que esperar a lo más 10 minutos para la próxima.
 - Usted se quedó dormido por 20 minutos. Cuando despierta le dicen que pasaron 2 micros. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas hayan pasado en los últimos 10 minutos de su siesta?
 - Haciendo grandes esfuerzos usted recuerda que la micro (XXY) también le sirve, y ésta pasa a tasa de 2 cada 15 minutos. Calcule la probabilidad de que se pueda ir a su casa en los próximos 5 minutos.
 - Piense ahora que se subió a la micro. Su trayecto es largo y tiene un tiempo para filosofar. Usted observa que el número de pasajeros que se sube es un proceso de Poisson de parámetro λ (personas/minuto). También observa que el chofer no le da boleto a todos los pasajeros sino que sólo le da al 80 % elegidos al azar. Si $Y_t = N^\circ$ de boletos entregados en $(0, t)$, $P_k(t) = P(Y_t = k)$ donde Y_t se llama proceso de Poisson filtrado. Plantee las ecuaciones diferenciales para $P_k(t)$ y muestre que:

$$P_k = \frac{e^{-\lambda at} (\lambda at)^k}{k!}$$

Es solución con $a=0.8$.

10. A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 15 autos por hora.
- Si entre las 12:00 y 13:00 pm. llegaron 15 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.
 - Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 5 minutos. Si la bomba se está usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es q_n .
- Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso “Número de vehiculos en la gasolinera”.

2) Suponiendo

$$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3} & n=0,1,2,3 \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

11. La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: los paciente tipo A, a una tasa de 4 por hora y los tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 15 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 40 minutos.
 - a) Plantee el proceso a estudiar, indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.
 - b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique cómo calcularía la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (considere un turno de 24 horas). ¿Cómo cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los equipos médicos es más lento demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo), manteniéndose el resto de las condiciones?
12. A una oficina del Registro Civil e Identificación llega gente a sacar su cédula de identidad según un proceso de Poisson de tasa 12 por hora.
 - a) Existen dos funcionarios que atienden cada uno según una exponencial de media 8 minutos. Por simplicidad de cálculo suponga que una persona ingresa al sistema sólo si en él hay menos de 4 personas. Calcule en régimen permanente:
 - 1) La proporción de personas que no ingresa.
 - 2) El tiempo promedio que demora una persona en el sistema.
 - b) Las autoridades desean cambiar el procedimiento de atención separándolo en dos etapas. La etapa A (pago y llenado de antecedentes) con un funcionario atendiendo según una exponencial de media 4 minutos y la etapa B (foto, firma, huellas) atendida por un funcionario según una exponencial de media 4 minutos. Cada cliente debe pasar secuencialmente por ambas

etapas (A-B) y en las dos puede existir cola sin restriccin de capacidad. Modele este sistema planteando el proceso de estudio y el diagrama de estados.

13. Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto.
 - a)
 - 1) Si en un intervalo de 5 minutos llegaron 8 alumnos, calcule la probabilidad de que sólo uno de ellos haya llegado en el último minuto.
 - 2) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.
 - b) El negocio funciona con tres fotocopadoras y la atención de un alumno es exponencial de media 2 minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compañeros se va a otro negocio.
 - 1) Si $X_t : N^o$ de alumnos en el negocio; plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.
 - 2) Si $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$, $P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$, $P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0$, $P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4} P_0$, es solución de las ecuaciones, calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las máquinas.
 - c) De las tres fotocopadoras, dos son “corrientes” y una “especial”. Cada fotocopadora corriente funciona un tiempo exponencial de media 1 hora y su reparación demora una media de 15 minutos atendida por una persona. La fotocopadora especial funciona un tiempo exponencial de media 1,5 horas y su reparación demora 20 minutos atendida por dos personas. Existen dos personas para reparar las máquinas. Modele el sistema de reparación de fotocopadoras planteando el proceso en estudio y diagrama de estados.