

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

CONTROL 2

22 DE MAYO 2006

1. a) En una caja se encuentran 5 monedas, tales que: $\mathbb{P}(\text{cara en la } i\text{-ésima moneda}) = \frac{1}{1+i}$ con $i = 1, \dots, 5$. Al sacar una moneda y lanzarla se gana 10 U.M. si sale cara, en caso contrario 0 U.M. Calcular cuánto se está dispuesto a pagar (por moneda extraída), para que el juego convenga en promedio.

- b) Se dice que la variable X tiene distribución de Weibull de parámetros α y β ($\alpha, \beta > 0$) si su función densidad es:

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} \quad x > 0$$

Muestre que $\mathbb{E}(X) = k_1\Gamma(k_2)$, determinando las constantes k_1 y k_2 .

- c) Sea k v.a. discreta con $\mathbb{E}(k) = M$ y $V(k) = N$. Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$. Considere la v.a. $X = \sum_{i=0}^k X_i$; determine $\mathbb{E}(X)$. Observación: Note que la cantidad de variables que está sumando es aleatoria.

2. a) Sean X, Y v.a. continuas independientes. Muestre que:

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)f_Y(y)dy$$

- b) Considere X, Y v.a. independientes tales que $X \rightarrow e(\lambda)$, $Y \rightarrow e(\alpha)$ Calcule $\mathbb{P}(Y > k \cdot X) \forall k$.

- c) Considere X, Y v.a. independientes tales que $X \rightarrow N(0, 1)$, $Y \rightarrow N(0, 1)$. Usando T.C.V. determine la densidad de la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$.

3. a) Sean $X_1 \rightarrow N(1, 9)$, $X_2 \rightarrow N(1, 4)$ v.a. independientes. Calcule $\mathbb{P}(|X_1 - 2X_2| > 1)$.

- b) La mayor parte de los productos envasados y que se venden por peso, pueden ser modelados razonablemente por una v.a. Normal. Suponga, por lo anterior, que el peso de los paquetes de arroz (de supuestamente 1 kg.) es una v.a. $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ (con X medida en gramos).

Un paquete se considera inaceptable para el productor si su peso es mayor a $\mu + 1,5\sigma$ e inaceptable para el consumidor si es menor a $\mu - 1,5\sigma$.

- 1) Calcule la probabilidad que un paquete sea aceptable. ¿cuántos paquetes deben medirse en forma independiente para encontrar al menos uno inaceptable, con probabilidad 0.99?
- 2) ¿Cuántos paquetes deben medirse en forma independiente, para que su peso promedio difiera de μ en menos de 10 grs., con probabilidad 0.95? Suponga $\sigma = 20grs$.
- 3) Para no tener problemas, el productor decide eliminar todos los paquetes inaceptables, antes de ponerlos a la venta. Si Y representa la v.a. “peso de los paquetes que se venden”, determine la función densidad de Y . ¿Cuál es la esperanza de Y ? (Deje planteado).